

Die Beschleunigungen
in der
Schubstange eines Kurbelmechanismus
und
Berechnung
der
durch dieselben hervorgerufenen Maximalbiegungsspannung.

Inauguraldissertation
der
philosophischen Facultät in Rostock



eingereicht von

M. Pröll.
Assistent am Kgl. Polytechnicum in Aachen.

Mit 3 lithogr. Tafeln.

1872

(Separat-Abdruck aus dem „Civilingenieur“, Band XVIII. Heft 2 und 3.)

Einleitung.

Befindet sich eine Pleuellstange*) in der Ebene des Kurbelkreises in oscillatorischen Schwingungen, so entsteht in jedem Massentheileichen ein bestimmter Druck, der durch das Product aus Masse und effectiver Beschleunigung gemessen wird. Derselbe ist im Allgemeinen unter einem bestimmten Winkel gegen die Stange geneigt. Nur der Theil desselben, welcher normal zur Stange gerichtet ist, ruft in derselben eine Biegungsspannung hervor. Es handelt sich also

1) um die Bestimmung der effectiven Beschleunigungen der einzelnen Punkte der Größe und Richtung nach, unabhängig von der Massenvertheilung,

2) um die Bestimmung des Gesetzes, nach welchem bei vorgeschriebener Massenvertheilung die Pleuellstange auf Biegung in Anspruch genommen wird.

Die Massenvertheilung ist in der Praxis meistens eine ungleiche; entweder macht man die Pleuellstange nach der Kurbel zu stärker, indem man bei constanter Breite die Dimension in der Schwingungsebene vergrößert, oder man giebt ihr bei rundem Querschnitt von der Mitte aus nach beiden Enden ein bestimmtes Verjüngungsverhältniß.

Im Folgenden werde ich vorwiegend den synthetischen Weg verfolgen und erst auf Grund der Resultate, die geometrisch hergeleitet sind, die zur Lösung der vorliegenden Aufgabe nothwendigen Rechnungen ausführen.

Was das Gesetz der Beschleunigungen der einzelnen Punkte eines in einer Ebene bewegten starren Systems betrifft, so lehrt die Geometrie der Bewegung starrer Körper (kinematische Geometrie**) eine interessante Abhängigkeit.

*) Anmerkung. Ein im Maschinenbau üblicher Name für Schubstange resp. Kurbelstange.

**) Anmerkung. Die Kenntniß der Grundprinzipien der kinematischen Geometrie verdanke ich in erster Linie Herrn Prof. Dr. Aronhold in Berlin und bin ich ihm deswegen zu großem Danke verpflichtet.

Dieselbe ist so bestimmt und faßbar, daß sie ohne weitem allgemeinen Beweis sich in folgendem Satz zusammen fassen läßt:

Wenn ein ebenes starres System von Punkten gezwungen ist, sich in irgend einer Weise in der Ebene zu bewegen, so existirt in jedem Augenblick in der Ebene ein für die Beschleunigungen aller Systempunkte charakteristischer Punkt. Derselbe hat die Eigenschaft, daß die von ihm nach den Systempunkten gezogenen Strahlen proportional den Beschleunigungen derselben sind und mit den Richtungen sämtlicher Beschleunigungen einen constanten Winkel bilden. Wegen dieser Eigenschaft heißt dieser charakteristische Punkt das Beschleunigungscentrum oder der Beschleunigungspol für die augenblickliche Bewegung des Systems. Als Systempunkt hat er keine Beschleunigung und es ist hinsichtlich der Beschleunigungen der Systempunkte, was Größe und Richtung derselben betrifft, gerade so, als ob das ganze System einen Augenblick sich um denselben drehte.

Da er in jedem Augenblick seine Lage wechselt, so hat er nach einer bestimmten Bewegungsperiode des Systems eine Curve durchlaufen, die als Curve der Beschleunigungscentra oder Beschleunigungspole für das bewegte System eine ähnliche Rolle spielt, als die sogenannte Polbahn, auf welcher der augenblickliche Drehpunkt (Pol) des Systems fortrückt. Die Fahrstrahlen von den Systempunkten nach dem Pol geben bekanntlich ein Maas für die Bahngeschwindigkeiten derselben.

Denken wir uns nun eine bestimmte zwangsläufige Bewegung des Systems, so ist zur Bestimmung des Beschleunigungscentrums nur nöthig, die Geschwindigkeit v eines einzigen Systempunktes als Function der Zeit t zu kennen, und es lassen sich die Polarcoordinaten des Beschleunigungscentrums, bezogen auf den augenblicklichen Drehpunkt als Ordinatenmittelpunkt, ganz allgemein für jede Art der zwangsläufigen Bewegung leicht herleiten.

Es ist nicht der Zweck der vorliegenden Arbeit, das Gesetz für die Größe und Richtung der Beschleunigungen in einem bewegten System von Punkten in seiner ganzen Allgemeinheit herzuleiten. Wir verweisen auf das neueste Werk von Schell „Theorie der Bewegung und Kräfte“, Capitel VI, dem wir außer dem bereits angeführten noch folgende Sätze entnehmen:

Denkt man sich sämtliche Beschleunigungen der Systempunkte nach der Normale und Tangente der von diesen beschriebenen Bahnen zerlegt, so ist der Ort aller derjenigen Punkte, welche nur Tangentialbeschleunigung haben und keine Normalbeschleunigung, ein Kreis, der sogenannte Wendekreis des Systems; er geht durch den Pol und sein Mittelpunkt liegt auf der Normalen zur Polbahn.

Ebenso ist der Ort aller derjenigen Punkte, welche nur Normalbeschleunigung haben und keine Tangentialbeschleunigungen, ebenfalls ein Kreis. Wir wollen ihn kurz den Tangentialkreis nennen, weil sein Mittelpunkt auf der Tangente zur Polbahn liegt. Er geht ebenfalls durch den Pol.

Der Schnittpunkt beider Kreise hat als Systempunkt weder Tangential- noch Normalbeschleunigung und ist also das vorhin definirte Beschleunigungszentrum des Systems. Man kann bekanntlich in jedem starren System, das in einer Ebene eine bestimmte Bewegung hat, in letzterer 2 Curven verzeichnen, deren Abrollen auf einander die zwangsläufig vor sich gehende Bewegung des Systems erzeugt. (Siehe Verhandlungen des Vereins für Gewerbefleiß, Heft 3, Jahrg. 1871, „Grundzüge der theoretischen Maschinengetriebelehre“ von Prof. Reuleaux, Seite 225.) Man nennt diese Curven die Polbahnen des Systems. In Figur 1, Taf. 1, sind dieselben im Anschluß an die im Werk von Schell gebrauchten Bezeichnungen mit C und I bezeichnet. PT die Tangente, PN die Normale im Pol, die beiden gezeichneten Kreise seien die vorhin definirten. Ziehen wir einen Fahrstrahl r nach dem beliebig gewählten Punkt M des bewegten Systems, welchem die Curve C angehört (Curve I liegt fest in der Ebene) und nennen den Winkel, den r mit der Tangente PT bildet ε , ferner die Winkelgeschwindigkeit um den Pol Ω , wobei Ω als Function der Zeit t gegeben sein mag, φ_n die Normalbeschleunigung des Punktes M, φ_t die Tangentialbeschleunigung des Punktes M, U die Geschwindigkeit, mit welcher der Pol auf der Polbahn, während der Bewegung des Systems fortrückt, so folgt

$$\text{Durchmesser des Wendekreises } PQ = \frac{U}{\Omega},$$

$$\text{„ „ Tangentialkreises } PR = \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}}$$

$$\varphi_n = -\Omega^2 r + \Omega U \sin \varepsilon,$$

$$\varphi_t = \frac{r d\Omega}{dt} - \Omega U \cos \varepsilon.$$

Wir entnehmen diese Gleichungen dem Schell'schen Werk, um noch eine interessante Eigenschaft beider Kreise abzuleiten, von der wir später Gebrauch machen werden.

Der Fahrstrahl r (Geschwindigkeitsradius) schneidet beide Kreise in den Punkten A und B (siehe Figur 2). Nennen wir die bezüglichen Sehnen k und k_1 , so folgt für die Sehne des Wendekreises aus $\triangle PQA$

$$k = PQ \sin \varepsilon = \frac{U}{\Omega} \sin \varepsilon, \text{ somit die Differenz}$$

$$r - k = r - \frac{U}{\Omega} \sin \varepsilon. \text{ Beiderseits mit } \Omega^2 \text{ multiplicirt}$$

$$(r - k) \Omega^2 = r \Omega^2 - U \Omega \sin \varepsilon = -\varphi_n.$$

Da nun Ω für alle Punkte des Systems constant ist, so folgt der Satz:

Die Centrifugalbeschleunigung irgend eines Punktes in einem bewegten System ist dem absoluten Werthe nach proportional der Differenz von Geschwindigkeitsradius und Sehne des Wendekreises.

Ähnlich folgt für den Tangentialkreis aus $\triangle PRB$

$$k_1 = PR \cos \varepsilon,$$

somit die Differenz

$$r - k_1 = r - \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}} \cos \varepsilon,$$

oder beiderseits mit $\frac{d\Omega}{dt}$ multiplicirt

$$(r - k_1) \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r d\Omega}{dt} - \Omega U \cos \varepsilon = \varphi_t.$$

$\frac{d\Omega}{dt}$ ist für alle Punkte des Systems constant, weil

Ω constant ist, mithin folgt für die Tangentialbeschleunigung der analoge Satz:

Die Beschleunigung irgend eines Punktes in der Richtung der Tangente seiner Bahn ist proportional der Differenz von Geschwindigkeitsradius und Sehne des Tangentialkreises.

Ziehen wir demnach nach einem beliebigen zweiten Systempunkt M' von P einen Fahrstrahl r', der die beiden Kreise in A' und B' schneidet, so verhalten sich die Centrifugalbeschleunigungen beider Punkte

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_n'} = \frac{AM}{A'M'}$$

und die Tangentialbeschleunigungen

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_t'} = \frac{BM}{B'M'}.$$

Die allgemeinen Formeln eignen sich, obgleich sie zur Entwicklung der allgemeinen Gesetze eine sehr günstige Gestalt haben, zur Anwendung auf specielle Beispiele wenig, da die Winkelgeschwindigkeit um den Pol als Function der Zeit nicht gegeben ist, bei der Ausrechnung aber selbst in den einfachsten Fällen meist nur durch eine complicirtere Gleichung darstellbar ist. Wollten wir z. B. diese Formeln zur Bestimmung der Beschleunigungen in einer Schubstange verwenden, so müßten wir aus dem Drehungsgesetz der Kurbel das Gesetz der Winkelgeschwindigkeit um den Pol herleiten. Es fragt sich, ob es nicht möglich ist, ohne die Berechnung der letzteren, direct, sobald nur die Bahngeschwindigkeit v irgend eines Punktes als Function der Zeit gegeben ist, das Beschleunigungscentrum zu construiren. Und in der That läßt sich für eine ganz allgemeine Art der zwangsläufigen Bewegung eine sichere und leichte Construction aufstellen:

Graphische Construction des Beschleunigungscentrums in einem bewegten, in sich unveränderlichen System.

Um von einer zwangsläufigen Bewegung eine klare Vorstellung zu haben, denken wir uns zwei Kurbeln (vergl. Fig. 3) von beliebiger Länge durch eine gerade Stange verbunden. An dieser Stange sei eine beliebig gestaltete ebene Fläche befestigt, so daß also den Punkten derselben eine ganz bestimmte Bewegung vorgeschrieben ist.

Zunächst ist zu bemerken, daß der Wendekreis eine rein kinematische Deutung zuläßt, da auf seine Größe und Lage im System das Geschwindigkeitsgesetz, insofern es von der Zeit abhängt, keinen Einfluß hat. In unserm Falle bestimmt er sich am einfachsten durch die Gleichung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}, \text{ wobei (Fig. 3)}$$

der Abstand des Pols vom Kurbelmittel A mit r_1 ,

" " " " vom Kurbelende B mit r ,

" " " " vom Schnittpunkte S des Wendekreises mit dem Strahl PA mit k bezeichnet ist. Auf dem andern Strahl PD finden wir auf dieselbe Weise den Schnittpunkt S; durch diese beiden Punkte SS_1 und durch den Pol geht der Wendekreis, der somit eindeutig bestimmt ist.

Gesetzt nun, wir kennen außer der Richtung der Beschleunigung des Punktes B, die aus $v = F(t)$ mit-

$$\text{telst der Formel } \operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{dv}{dt}}{v^2} \text{ hergeleitet wird (AB = R)}$$

noch die Richtung der Beschleunigung eines zweiten Punktes im bewegten System, so leuchtet ein, daß wenn wir durch die beiden Systempunkte und den Schnitt beider Beschleunigungsrichtungen einen Kreis legen, auf diesem Kreis das Beschleunigungscentrum liegen muß, denn alle Punkte

desselben haben die Eigenschaft, daß ihre Fahrstrahlen nach den beiden Systempunkten mit deren Beschleunigungen gleiche Winkel bilden (als Peripheriewinkel auf demselben Bogen).

Diese Eigenschaft besitzt auch, nach dem in der Einleitung aufgestellten Satz, das Beschleunigungscentrum.

Es existiren nun aber Punkte im bewegten System, deren Beschleunigungsrichtungen wir sofort angeben können. Es sind dies die Punkte des Wendekreises, deren Beschleunigungen sämtlich senkrecht zu ihren Geschwindigkeitsradien stehen. Ziehen wir somit durch den Pol einen beliebigen Strahl PR (siehe Fig. 3), nennen den Schnittpunkt desselben mit dem Wendekreis F den Schnittpunkt der Beschleunigungsrichtung von F mit derjenigen des ersten Punktes E und legen durch die beiden Systempunkte F, B und den Schnittpunkt E einen Kreis, so erhalten wir in dem andern Schnittpunkt O desselben mit dem Wendekreis das gesuchte Beschleunigungscentrum.

Da wir unendlich viel Strahlen durch den Pol ziehen können, so können wir auch unendlich viel Kreise durch je 2 Systempunkte und den Schnittpunkt ihrer Beschleunigungen legen, die sich alle in einem Punkte und zwar in dem Beschleunigungscentrum schneiden. In der Figur 3 ist noch ein Kreis BE_1F_1 construirt. Ist die Geschwindigkeit, mit der sich Punkt B bewegt, constant, (Fig. 4), so fällt die Beschleunigung des Punktes B in den Geschwindigkeitsradius. Die Beschleunigung des Punktes S, wenn dieser dem bewegten System angehört, schneidet die Beschleunigung von B in S selbst. Da hier also zwei Punkte zusammengefallen sind, durch welche nach der vorhin entwickelten Construction der Kreis zur Bestimmung des Beschleunigungscentrums gehen soll, so muß dieser die Beschleunigung von B in S tangiren, d. h.: Wenn die Geschwindigkeit v irgend eines Systempunktes constant, also unabhängig von der Zeit ist, so hat man nur durch denselben den Geschwindigkeitsradius zu ziehen und um die zwischen dem Schnittpunkt desselben mit dem Wendekreis liegende Strecke als Durchmesser einen Kreis zu beschreiben. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Wendekreis ist das Beschleunigungscentrum für die augenblickliche Bewegung des Systems.

Die Anwendung dieser sehr einfachen sichern Construction des Beschleunigungscentrums im Mechanismus der Schubkurbel ist nun leider nicht gut durchführbar, da der Wendekreis beim Einhalten des practischen Verhältnisses von Kurbel-

länge zur Schubstangenlänge $= \frac{1}{5}$ in den meisten Lagen so groß ausfällt, daß er zeichnerisch nicht mehr zu erreichen ist.

Wir müssen daher den Weg der Rechnung einschlagen:

I. Bestimmung des Beschleunigungszentrums für eine Schubkurbel.

Bei der Schubkurbel (Fig. 5, Tafel 1), für welche wir in der Folge die Voraussetzungen machen, daß sich die Kurbel $AC = r$ mit constanter Geschwindigkeit drehe, hat Punkt C der Schubstange nur Normalbeschleunigung, deren Richtung in die Kurbel fällt (denn $\frac{dv}{dt} = 0$) und Punkt B nur Tangentialbeschleunigung. Denn es ist die Centrifugalbeschleunigung $\frac{u^2}{\rho} = 0$, weil $\rho = \infty$ ist. Der Schnittpunkt beider Beschleunigungsrichtungen ist A, somit liegt das Beschleunigungszentrum auf einem Kreis, den wir durch die 3 Punkte ABC der Schubkurbel legen.

Dieser Kreis läßt sich, wenn wir die Kurbel stets um 10° drehen, für alle 18 Lagen im Halbkreis mit genügender Genauigkeit verzeichnen.

Um nun den Punkt des Kreises zu bestimmen, in welchem das Beschleunigungszentrum O zu liegen kommt, bestimmen wir den Winkel φ , welchen der Strahl AO mit der verticalen Schubrichtung bildet.

1) Kurbel im untern Quadranten — Fig. 5.

$$\text{Aus } \triangle OAC \text{ folgt } \frac{OC}{r} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \beta}.$$

$$\text{„ } \triangle OCB \text{ „ } \frac{OB}{l} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}.$$

Beide Gleichungen durcheinander dividirt giebt

$$\frac{OC}{OB} = \frac{\sin(\alpha + \varphi) \cdot r \sin \alpha}{l \sin \beta \cdot \sin \varphi}.$$

Nun ist aber, wenn wir von C ein Loth auf die Schubrichtung fallen, $r \sin \alpha = l \sin \beta$, ferner nach dem Satz vom Beschleunigungszentrum $\frac{OC}{OB} = \frac{f}{f_1}$, wenn wir die Beschleunigungen der Punkte C und B mit f und f_1 bezeichnen.

Wir haben demnach die Beziehung

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{f}{f_1}, \text{ woraus}$$

$$\cotg \varphi = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{f}{f_1} - \cos \alpha \right) \text{ folgt.}$$

2) Kurbel im obern Quadranten.

Es folgt (Fig. 6) analog

$$\text{aus } \triangle OAC \quad \frac{OC}{r} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \beta},$$

$$\text{aus } \triangle OCB \quad \frac{OB}{l} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha},$$

durch einander dividirt

$$\frac{OC}{OB} = \frac{\sin(\alpha - \varphi) r \sin \alpha}{l \sin \beta \cdot \sin \varphi}.$$

Auch hier ist $r \sin \alpha = l \sin \beta$ und $\frac{OC}{OB} = \frac{f}{f_1}$, so mit $\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{f}{f_1}$,

$$\cotg \varphi = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{f}{f_1} + \cos \alpha \right).$$

In beide Gleichungen ist der Werth $\frac{f}{f_1}$, den wir so fort bestimmen werden, absolut einzusetzen.

Bestimmung des Werthes $\frac{f}{f_1}$.

A) Durch Rechnung. Fig. 5.

Die Bahngeschwindigkeiten von C resp. von B seien v und u , dann verhalten sich bekanntlich die Geschwindigkeiten wie die Abstände der Punkte C und B vom Pol (augenblicklicher Drehpunkt)

$$\frac{v}{u} = \frac{PC}{PB} = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

woraus $u = v(\sin \alpha + \cos \alpha \tg \beta)$ folgt. Berücksichtigen wir, daß $\alpha = f(\beta)$ und v constant ist, so folgt durch Differenzieren von u nach α

$$\frac{du}{d\alpha} = v \left(\cos \alpha - \sin \alpha \tg \beta + \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \beta} \frac{d\beta}{d\alpha} \right).$$

Da $r \sin \alpha = l \sin \beta$, folgt

$r \cos \alpha d\alpha = l \cos \beta d\beta$, also

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{r \cos \alpha}{l \cos \beta}.$$

Diesen Werth in die Gleichung für $\frac{du}{d\alpha}$ eingesetzt giebt:

$$\frac{du}{d\alpha} = v \left(\cos \alpha - \sin \alpha \tg \beta + \frac{r \cos^2 \alpha}{l \cos^3 \beta} \right).$$

Nun ist $\frac{rd\alpha}{dt} = v$, somit

$$\frac{du}{dt} = \frac{v^2}{r} \left(\cos \alpha - \sin \alpha \tg \beta + \frac{r \cos^2 \alpha}{l \cos^3 \beta} \right) = f_1;$$

die Centrifugalbeschleunigung des Punktes C ist $f = \frac{v^2}{r}$, somit folgt:

$$\frac{f_1}{f} = \cos \alpha - \sin \alpha \tg \beta + \frac{r \cos^2 \alpha}{l \cos^3 \beta}.$$

Ganz denselben Werth erhalten wir, wenn die Kurbel im obern Quadranten steht. Für die numerische Ausrechnung ist es zweckmäßig, die Formel folgendermaßen umzuge-

stalten: Multiplizieren wir die rechte Seite mit $\frac{\cos \beta}{\cos \beta}$ so können wir die beiden ersten Glieder zu $\cos(\alpha + \beta)$ vereinigen und erhalten

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \frac{r \cos^2 \alpha}{l \cos^3 \beta}.$$

Specialfälle.

1) Ist $\alpha = 0$, so folgt $\angle \beta = 0$

also $\frac{f_1}{f} = 1 + \frac{r}{l}$ und $\cotg \varphi = \infty$, d. h.

das Beschleunigungscentrum liegt auf der Verticalen AB, Fig. 7, und zwar in einem Abstände OC, für welchen

$$\frac{OB}{OC} = \frac{f_1}{f} = 1 + \frac{r}{l} \text{ ist.}$$

Nun ist aber für diese Lage $OB - OC = l$. Aus beiden Gleichungen folgt $OC = \frac{l^2}{r}$.

2) Ist $\alpha = 90^\circ$, so ist $\sin \beta = \frac{r}{l}$, also $\frac{f_1}{f} = -\tg \beta$, d. h. das Beschleunigungscentrum liegt in der Ecke eines Rechtecks, dessen Diagonale die Schubstange und dessen gegenüberliegender Eckpunkt der Mittelpunkt des Kurbelkreises ist. (Fig. 8.) Das negative Vorzeichen weist darauf hin, daß f_1 die Richtung gewechselt hat. Der Werth für $\cotg \varphi$ geht über in $\cotg \varphi = \frac{f}{f_1} = \cotg \beta$, also $\varphi = \beta$, was auch direct aus der Figur folgt.

3) Für $\alpha = 180^\circ$ ist $\beta = 0$ und $\frac{f_1}{f} = -1 + \frac{r}{l}$, $\cotg \varphi = \infty$, d. h. (Fig. 9) das Beschleunigungscentrum liegt auf der Verticalen in einem Abstände OC, welcher sich aus den Gleichungen

$\frac{OB}{OC} = +1 - \frac{r}{l}$ (das Verhältniß ist dem absoluten Werthe von $\frac{f_1}{f}$ gleichzusetzen) und $OC - OB = l$ bestimmt.

$$OC = \frac{l^2}{r} \text{ ebenso wie ad 1).}$$

4) Der Winkel α , für welchen die Beschleunigung des Punktes B $f_1 = 0$ wird, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = 0 = \cos \alpha - \sin \alpha \tg \beta + \frac{r \cos^2 \alpha}{l \cos^3 \beta}.$$

Wir setzen $\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha$, wonach

$$\cos \alpha = \frac{r}{l \cos^3 \beta} \left(\frac{l^2}{r^2} \sin^2 \beta \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \right) \text{ und}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{l^2}{r^2} \sin^2 \beta \text{ eingeführt, giebt}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{r} \cos \beta \sin^2 \beta. \text{ Quadriert und}$$

wieder $\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha$ eingesetzt führt auf die Gleichung

$$1 - \sin^2 \alpha = \frac{r^2}{l^2} \sin^4 \alpha \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \alpha \right) \text{ oder}$$

$$- \left(\frac{r}{l} \right)^4 \sin^6 \alpha + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

zur Bestimmung des Winkels α , für welchen $f_1 = 0$ ist.

Für das Verhältniß $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ist α nahezu $= 80^\circ$.

Wir bezeichnen diesen Winkel mit α_0 .

B) Graphische Construction des Verhältnisses $\frac{f_1}{f}$. (Fig. 10).

Die Bahngeschwindigkeiten u und v der Punkte B und C verhalten sich, wie schon früher bemerkt wurde, wie die Strecken BB und BC, oder auch, wenn wir durch A eine Linie $\parallel CB$ ziehen, wie die Strecken BD und AC. Der Annahme nach ist nun v constant.

Wählen wir zweckmäßig als graphisches Maas für v die Kurbellänge r , so können wir durch wiederholte Ausführung der angegebenen Construction für eine beliebige Anzahl von Kurbellagen über dem von B zurückgelegten Weg eine Curve construiren, die graphisch das Geschwindigkeitsgesetz des Punktes B darstellt. Ziehen wir nun in D an diese Curve eine Tangente und errichten auf derselben eine Normale, so ist die Subnormale $BE = \frac{du}{dt}$.

Um dieses einzusehen, denken wir uns die Schubstange unendlich wenig verrückt, Punkt B legt in dem Zeitelement dt das Bezelement ds zurück. Bezeichnen wir noch den Winkel, welchen die Tangente in D mit der Verticalen einschließt, mit τ , so folgt $\tg \tau = \frac{du}{ds}$ oder $du = ds \cdot \tg \tau$. Beider-

seits durch dt dividirt und $\frac{ds}{dt} = u$ gesetzt, giebt:

$$\frac{du}{dt} = u \tg \tau = BE.$$

Drehen wir die Subnormalen sämtlicher Punkte der Geschwindigkeitscurve um 90° , so erhalten wir in dem continuirlichen Verbindungszug sämtlicher Endpunkte eine Curve, welche das Gesetz $\frac{du}{dt} = F(s)$ graphisch darstellt.

Aus der Gleichung $f = \frac{v^2}{r}$ folgt, wenn wir $v = r$ setzen, $f = r$.

Die gedrehte Subnormale $BE' = y$ gesetzt giebt

$$\frac{f_1}{f} = \frac{y}{r}.$$

In Fig. 11, Tafel 1, ist nach dem angegebenen Verfahren bei einer Kurbel, für welche $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ist, über dem vom Punkte B zurückgelegten Weg die Geschwindigkeitscurve construiert. Aus dieser ist zeichnerisch eine zweite Curve hergeleitet, deren Ordinaten ein Maaß für die Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ geben.*)

Mit Benutzung der analytischen Formeln für $\frac{f}{f_1}$ u. $\cotg \varphi$ sind für nun 18 Lagen der Kurbel im Halbkreis, $\alpha = 10^\circ 20' \dots$ bis 180° die Beschleunigungscentra bestimmt. Für das Verhältniß $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ergaben sich folgende Werthe:

Tabelle I.

$\alpha = 0^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{f_1}{f} = 1,2$	1,173	1,093	0,967	0,803	0,609	0,399	0,187	— 0,017	— 0,204
$\varphi = 180^\circ$	$127^\circ 20'$	$94^\circ 20'$	$71^\circ 30'$	$53^\circ 20'$	$37^\circ 50'$	$23^\circ 25'$	$10^\circ 40'$	$0^\circ 40'$	$11^\circ 30'$
$\frac{\xi}{l} = —$	—	—	—	—	0,437	0,433	0,428	0,423	0,418
$\frac{M_{\max}}{a l^2} =$	—	—	—	—	0,0608	0,06451	0,0644	0,0640	—
$\alpha =$	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$— \frac{f_1}{f} =$	0,364	0,497	0,6	0,676	0,728	0,765	0,785	0,796	0,8
φ	$20^\circ 50'$	$29^\circ 20'$	$36^\circ 40'$	$42^\circ 20'$	$46^\circ 50'$	$48^\circ 30'$	46°	$31^\circ 10'$	0°

Die Bedeutung der Werthe $\frac{\xi}{l}$ und $\frac{M_{\max}}{a l^2}$ folgt später.

In Figur 12, Tafel 1, sind die den 18 Lagen der Kurbel im Halbkreis entsprechenden Beschleunigungscentra durch einen Zug verbunden, der bis zu einer gewissen Annäherung das Gesetz veranschaulicht, nach welchem sich das Beschleunigungscentrum in der Ebene bewegt. Die verticale Schubrichtung ist Symmetrieachse. Der Kreis in der Mitte ist der Kurbelkreis. Auf einem größeren concentrischen Kreis ist die Theilung aufgetragen.

*) Anmerkung. Diese Beschleunigungscurve hat in neuerer Zeit Radinger in einem sehr schätzenswerthen Aufsatz „Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“ (siehe Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins 1869, Heft VIII, und Referat von Professor R. R. Werner in Heft 1, Jahrg. 71, der Zeitschrift des Vereins deutscher Ing.) benutzt, um den Einfluß der hin- und hergehenden Massen auf den Gang der Dampfmaschinen und das Regulirungsvermögen des Schwungrades zu bestimmen. Unter Andern combinirt Radinger das Diagramm der Beschleunigungen aller im Kreuzkopf concentrirt gedachten Massen, die eine hin- und hergehende Bewegung haben, mit dem Indicatorgramm und zeigt, wie man erst durch diese Combination eine richtige Vorstellung von der Größe des Druckes erhält, der sich vom Kreuzkopf durch die Pleuellange auf die Kurbel überträgt.

Geht z. B. die Kurbel durch den Theilpunkt 4, so liegt das Beschleunigungscentrum im Punkt 4 der Curve.

Diese Curve der Beschleunigungscentra ist, wie aus den Gleichungen für φ und $\frac{f_1}{f}$ zu ersehen ist, Seite 116 und 117 der Gestalt und Lage nach wesentlich bedingt durch das Verhältniß $\frac{r}{l}$.

Specialfall.

Wählt man das Verhältniß $\frac{r}{l} = 1$, so reducirt sich die Curve der Beschleunigungscentra auf einen Punkt, denn die Gleichung für $\frac{f_1}{f}$ geht, wenn die Kurbel im untern Quadranten steht, da $\alpha = \beta$ ist, über in $\frac{f_1}{f} = 2 \cos \alpha$. Es folgt

$$\cotg \varphi = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} - \cos \alpha \right)$$

$$\text{und } \cotg \varphi = - \cotg 2\alpha.$$

Dieser Gleichung genügt $\angle \varphi = 180 - 2\alpha$, d. h. (siehe Fig. 13) der Schenkel des Winkels φ im Kur-

belmittlepunkt A tangirt den um das $\triangle ABC$ beschriebenen Kreis, weil der Winkel

$$\angle MAB = \angle ACB = 180^\circ - 2\alpha \text{ ist.}$$

Analog gestaltet es sich für die Stellung der Kurbel im oberen Quadranten.

Während der Drehung der Kurbel durch den ganzen Kreis (auch hier constante Geschwindigkeit vorausgesetzt) bleibt das Beschleunigungscentrum fest in der Ebene liegen. Die Beschleunigung des beliebig gewählten Punktes D ist proportional der Strecke AD und mit derselben gleich gerichtet.

Dieses sehr einfache Resultat läßt sich indeß ohne Weiteres herleiten.

Verlängern wir die Stange BC um sich selbst, so ist Punkt E derjenige Punkt der bewegten Stange, welcher sich in gerader Bahn bewegt, mithin hat derselbe nur Tangentialbeschleunigung. Auf den beiden um die $\triangle ACB$ und $\triangle ACE$ beschriebenen Kreisen muß, wie früher nachgewiesen, das Beschleunigungscentrum liegen. Dasselbe ist somit der Schnittpunkt A beider Kreise. An diesem speciellen Fall läßt sich übrigens leicht der Beweis für die Richtigkeit des im Anfang dieses Aufsatzes aufgestellten kinematischen Satzes beweisen, daß nämlich die Beschleunigung irgend eines Systempunktes proportional dem Fahrstrahl nach dem Beschleunigungscentrum ist und dieser mit der Beschleunigung eines jeden Punktes des bewegten Systems einen constanten Winkel bildet.

Beweis des Satzes vom Beschleunigungscentrum an einem speciellen Beispiel.

Wir setzen voraus, die Kurbel AC drehe sich mit constanter Geschwindigkeit, die Normalen zu den von C und B beschriebenen Bahnen schneiden sich im Pol P.

Mit Berücksichtigung der in die Fig. 14 eingeschriebenen Bezeichnungen ist die Bahngeschwindigkeit des Punktes D $u = x\omega$, worin x der Geschwindigkeitsradius und ω die Winkelgeschwindigkeit um den Pol ist. (Diese und die Winkelgeschwindigkeit um A sind einander gleich.)

Weil $\omega r = v$ constant ist und x variabel, folgt

$$du = \omega dx.$$

Aus $\triangle PCD$ folgt $\frac{x}{a} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \varphi}$ und da $\alpha = f(\varphi)$

$$\frac{dx}{d\alpha} = a \left[\frac{2 \cos 2\alpha}{\sin \varphi} - \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\alpha} \right].$$

Aus $\triangle PCD$ folgt ferner $\frac{a}{r} = \frac{\sin \varphi}{\sin(2\alpha + \varphi)}$ und

differenziert: $r \cos \varphi d\varphi = a \cos(2\alpha + \varphi)(2d\alpha + d\varphi)$, den Werth für $\frac{a}{r}$ eingesetzt, giebt

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{2 \cos(2\alpha + \varphi) \sin \varphi}{\sin 2\alpha},$$

was in die Gleichung für $\frac{dx}{d\alpha}$ eingesetzt giebt

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2a}{\sin \varphi} [\cos 2\alpha - \cos \varphi \cos(2\alpha + \varphi)].$$

Die Auflösung von $\cos(2\alpha + \varphi)$ führt auf die Gleichung $dx = 2a d\alpha \sin(2\alpha + \varphi)$.

In der Gleichung $du = \omega dx$ multipliciren wir die rechte Seite mit $\frac{r}{r}$ und beide Seiten mit $\frac{\omega}{dt}$, wodurch wir erhalten:

$$\frac{\omega dx}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{\omega \cdot 2a}{r} \cdot \frac{r d\alpha}{dt} \sin(2\alpha + \varphi).$$

Nun ist aber $\frac{r d\alpha}{dt} = v$ und $\frac{a}{r} = \frac{\sin \varphi}{\sin(2\alpha + \varphi)}$, so

$$\text{mit} \quad \frac{du}{dt} = \frac{2v^2}{r} \sin \varphi,$$

dies ist die Tangentialbeschleunigung des Punktes D in seiner Bahn.

Zur Berechnung der Normalbeschleunigung $\frac{u^2}{\rho}$ des Punktes D, wo ρ der Krümmungsradius der Bahn ist, welche Punkt D beschreibt, construiren wir uns den Wendekreis des Systems. Derselbe muß nach dem in der Einleitung aufgestellten Satz durch den Pol und durch diejenigen Punkte des bewegten Systems gehen, welche nur Tangentialbeschleunigung besitzen. Von der bewegten Stange sind aber B und E zwei solche Punkte, somit ist der Wendekreis bestimmt.

Nennen wir die Sehne PH k , so folgt nach dem in der Einleitung aufgestellten Satz, daß die Normalbeschleunigung eines Punktes in seiner Bahn proportional der Differenz des Geschwindigkeitsradius und der Sehne des Wendekreises ist, $\frac{u^2}{\rho} = \omega^2(k - x)$. Die effective Beschleunigung des Punktes D ist

$$f = \sqrt{\left(\frac{u^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2}$$

oder die bezüglichlichen Werthe eingesetzt,

$$f = \omega^2 \sqrt{(k - x)^2 + 4r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ziehen wir AH so folgt aus $\triangle DAH$

$$AD = \sqrt{DH^2 + AH^2}$$

$$= \sqrt{(k - x)^2 + 4r^2 \sin^2 \varphi}, \text{ somit}$$

$f = \omega^2 AD$, d. h. der Fahrstrahl vom Beschleunigungscentrum ist proportional der effective Beschleunigung des Systempunktes.

Die Richtung der Beschleunigung f gegen den Fahrstrahl x ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{u^2}{\rho}} = \frac{2\omega^2 r \sin \varphi}{\omega^2 (k - x)}.$$

Dieser Werth folgt für den Winkel γ auch aus $\triangle ADH$, somit ist bewiesen, daß die Richtung der effectiven Beschleunigung des Punktes D mit dem Fahrstrahl AD zusammenfällt, d. h. einen constanten Winkel bildet, der freilich in unserm Falle $= 0$ ist.

Verlegung der Beschleunigungen in die Richtung der Schubstange.

Zur Ermittlung der Biegung, welche die Schubstange bei schneller Rotation der Kurbel in Folge der Beschleunigungen erfährt, haben wir zunächst die Componenten derselben senkrecht zur Schubstangenrichtung für jeden Punkt aufzusuchen. Die Verbindung der Endpunkte dieser durch Ordinaten dargestellten Componenten veranschaulicht als Curve das Gesetz, wonach wir die Schubstange als einen auf 2 Stützpunkten frei aufliegend belasteten Träger zu untersuchen haben. Die Untersuchung lehrt:

Bei Annahme gleicher Massenvertheilung in der Schubstange stellt sich dieses Belastungsgesetz in jeder Lage der Kurbel durch eine gerade Linie dar. Dies gilt allgemein, wie auch das Gesetz für die Drehgeschwindigkeit der Kurbel beschaffen sein mag. Um dies nachzuweisen, bezeichnen wir den Winkel, welchen irgend ein Beschleunigungsstrahl von O (Fig. 15, Tafel 2) mit der Beschleunigung des zugehörigen Punktes bildet mit η . Dieser $\angle \eta$ ist für alle Punkte der Schubstange eine constante Größe.

Ziehen wir von O einen Strahl, so daß dieser mit der Richtung der Schubstange den Winkel η bildet, so ist, da in diese die Beschleunigung des Schnittpunktes G fällt, in demselben keine Componente, welche die Stange auf Biegung in Anspruch nimmt, vorhanden. Durch diesen Punkt geht somit die Linie, welche die Vertheilung der biegenden Beschleunigungscomponenten darstellt. Am leichtesten construirt man den Strahl, wenn man um B einen Kreis mit r beschreibt. Derselbe geht durch den Schnittpunkt F .

Da die Beschleunigung des Endpunktes C für alle Lagen constant ist, so wählen wir als graphisches Maaß, für dieselbe irgend eine Einheit $= CH$. Der Endpunkt L der Componente derselben ist ein zweiter Punkt der geraden Linie, die durch G geht.

Ziehen wir nun nach dem beliebig gewählten Punkt D den Beschleunigungsstrahl $OD = \rho$, legen unter dem Winkel

η an diesen die Beschleunigungsrichtung und bezeichnen den Winkel zwischen Beschleunigungsstrahl OD und Schubstange mit χ , so ist die Beschleunigung von $D = A\rho$, wo A eine Constante ist. Es ist die bezügliche Componente senkrecht zur Schubstange $= A\rho \sin(\chi - \eta)$. Die in D errichtete Ordinate der geraden Linie GL sei y , dann ist zu beweisen, daß $y = A\rho \sin(\chi - \eta)$ ist.

$\angle DOG$ sei $= \psi$, dann folgt aus $\triangle DOG$

$$\angle \chi = \psi + \eta,$$

$$\text{somit } y = A\rho \sin(\chi - \eta).$$

$\rho \sin \psi$ ist das von D auf OG gefällte Lot DN , somit y proportional DN .

Für irgend einen andern Punkt D' sei dieses Lot $D'N'$. Dann ist die zugehörige Ordinate y' proportional $D'N'$, d. h.

$$\frac{y}{y'} = \frac{DN}{D'N'} = \frac{GD}{GD'}.$$

d. h. die Endpunkte aller Ordinaten y liegen auf einer geraden Linie.

Die Beschleunigungscomponenten, welche in die Richtung der Pleuellstange fallen, gruppieren sich ebenfalls nach einer geraden Linie, die durch einen Punkt der Schubstange geht, den wir erhalten, wenn wir von O aus einen Strahl ziehen, der die Schubstange unter dem Winkel $90^\circ - \eta$ schneidet, oder was dasselbe ist, senkrecht zum Strahl OG steht. Dieser Schnittpunkt K hat nur Beschleunigung senkrecht zur Schubstange.

Die in die Richtung der Schubstange fallende Componente von C giebt, wenn man sie um 90° dreht, den Punkt M , durch welchen die gerade Linie geht, welche das Gesetz für die Vertheilung der Beschleunigungscomponenten in der Richtung der Schubstange darstellt.

Um den analogen Beweis hierfür zu führen, construiren wir im Punkt D die Beschleunigungscomponente y_1 und haben

$$y_1 = A_1 \rho \cos(\chi - \eta) = A_1 \rho \cos \psi.$$

$\rho \cos \psi$ ist das von D auf den Strahl OK gefällte Lot. Für den Punkt D' würden wir haben $y_1' = A_1 \rho' \cos \psi'$, d. h. die in die Richtung der Schubstange fallenden Beschleunigungscomponenten der Punkte D und D' verhalten sich, wie die von denselben auf den Strahl OK gefällten Lote. Diese verhalten sich wie die Strecken KD und KD' , somit ist der Beweis auch in diesem Falle geführt. *)

Wenn der Winkel $\alpha > \alpha_0$ ist, siehe Fig. 16, so fällt der charakteristische Schnittpunkt G zwischen die beiden Endpunkte C und B . Hieraus folgt, daß in diesen Stellungen

*) Anmerkung. Die auf Seite 15 bereits ausgesprochene Verallgemeinerung des eben für constante Umdrehungsgeschwindigkeit bewiesenen Gesetzes ist eine directe Folgerung aus dem Satz vom Beschleunigungscentrum und somit der Beweis auch hierfür geführt.

der Kurbel ein Punkt in der Schubstange existiert, wo die Momentencurve einen Wendepunkt hat, die Beanspruchung auf Biegung wird somit eine geringere sein.

Daß in der That für die Stellung der Kurbel im obern Quadranten solch ein Schnittpunkt G in der Schubstange existiert, davon überzeugt man sich direct, wenn man die Zerlegung der Beschleunigungen der Punkte C und B normal zur Schubstange vornimmt. Die Beschleunigung des Punktes C ist gegen den Kurbelmittelpunkt A gerichtet, diejenige des Punktes B von A fort. Die resp. Componenten sind daher entgegengesetzt gerichtet.

Um eine Gleichung zur Bestimmung des Abstandes $BG = z$ zu erhalten, folgt, wie leicht einzusehen, aus dem Kräftedreieck die Proportion

$$\frac{z}{1 \pm z} = \frac{f_1 \sin \beta}{f \sin(\alpha + \beta)} = \frac{b}{a}.$$

$\frac{b}{a}$ ist das Verhältniß der Componenten der Beschleunigungen der Punkte B und C.

Das + Vorzeichen gilt, wenn der Schnittpunkt G jenseits B, d. h. wenn die Kurbel im Winkelraum

$$0 < \alpha < \alpha_0 \text{ liegt,}$$

das — Vorzeichen, wenn G zwischen B und C fällt, d. h. wenn der Kurbelwinkel der Beziehung genügt:

$$\alpha_0 < \alpha < 180^\circ.$$

Im Anfange dieses Aufsatzes wiesen wir bereits darauf hin, daß der Querschnitt der Pleuellstange in praxi meistens nicht constant sei. Um daher die wahre Beanspruchung derselben auf Biegung zu erhalten, haben wir nur nöthig, jede Ordinate des geradlinigen Diagramms mit dem bezüglichen Querschnitt der Schubstange zu multipliciren. Wir erhalten dann eine Curve für die Vertheilung der biegenden Kräfte, aus der wir mit Hilfe der Graphostatik die zugehörige Momentenfläche construiren können. Bei ungleicher Massenvertheilung ist dies der beste zu numerischen Resultaten führende Weg, von dem wir auch später Gebrauch machen werden.

Bei der Annahme einer gleichmäßigen Massenvertheilung ist indeß die analytische Behandlung durchführbar.

II. Berechnung der Maximalbiegungsspannung bei gleichmäßiger Massenvertheilung.

Die früheren Betrachtungen haben gezeigt, daß die Belastung der als frei aufliegender Träger zu betrachtenden Schubstange für die Kurbellage im untern Quadranten durch eine trapezförmige Fläche darstellbar ist. Selbige ist durch die größte (a), resp. kleinste Ordinate (b) und die Länge l der Schubstange gegeben. (Fig. 17, Tafel 2).

Wir denken uns den Träger in der Entfernung ξ vom Auflager C zerschnitten, bezeichnen mit $x y$ die laufende Dr-

dinaten der geneigten Geraden RS, mit M das Moment der äußern Kräfte in der Entfernung ξ von C, und mit P den Auflagerdruck in C, dann ist

$$M = P\xi - \int_0^\xi y dx (\xi - x).$$

P bestimmt sich, wenn wir die Momentengleichung in Bezug auf das andere Auflager B als Momentenmittelpunkt herleiten:

$$Pl = \int_0^l y dx (l - x), \text{ somit}$$

$$M = \xi \int_\xi^l y dx - \frac{\xi}{l} \int_0^l y dx \cdot x + \int_0^\xi y dx \cdot x.$$

Die Gleichung der geraden Linie RS folgt aus der Proportion

$$\frac{a - y}{x} = \frac{a - b}{l}.$$

$$y = a - x \left(\frac{a - b}{l} \right).$$

Dies in die Gleichung für M eingesetzt, integrirt und alle gleichartigen Glieder vereinigt, giebt die Gleichung

$$M = \frac{a - b}{6l} \xi^3 - \frac{a}{2} \xi^2 + \frac{l\xi}{6} (2a + b).$$

Die Größe des Momentes ist bedingt durch die Werthe von a b und ξ . Setzen wir a und b vorläufig constant, so ist M ein Maximum für einen Werth ξ , der sich ergibt, wenn wir M nach ξ differenziren und den Differentialquotienten = 0 setzen:

$$\frac{dM}{d\xi} = 0 = \frac{a - b}{2l} \xi^2 - a\xi + \frac{l}{6} (2a + b).$$

Aus dieser quadratischen Gleichung für ξ folgt

$$\xi = \frac{l}{a - b} \left(a - \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} \right).$$

Hier ist allein das — Zeichen der Wurzel gültig. Für $b = 0$

geht der Werth ξ über in $(\xi) = l \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) = 0,423 l$.

Die beiden Gleichungen für M und ξ gelten für einen Kurbelwinkel

$$0 < \alpha < \alpha_0.$$

Wenn $\alpha_0 < \alpha < 180^\circ$ ist, so schneidet die gerade Linie RS die Schubstange zwischen den beiden Endpunkten C und B. Die Ordinate b ist a entgegengesetzt gerichtet. Um daher die bezüglichen Gleichungen für M und ξ zu erhalten, haben wir b negativ zu setzen und erhalten für den Fall

$$\alpha_0 < \alpha < 180^\circ$$

$$M = \frac{a + b}{6l} \xi^3 - \frac{a}{2} \xi^2 + \frac{l\xi}{6} (2a - b).$$

$$\xi = \frac{1}{a+b} \left[a - \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{3}} \right].$$

a und b sind Functionen des Winkels α und folgen aus der früher hergeleiteten Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{f_1 \sin \beta}{f \sin(\alpha + \beta)}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß das Maximalmoment in der Nähe des Kurbelwinkels von 80° eintritt. Es ist daher in der Tabelle I, Seite 11, für 5 Kurbellagen $\alpha = 50^\circ$ bis 90° der Werth $\frac{\xi}{1}$ mit Zuhilfenahme der letzten Gleichung

berechnet und die Substitution desselben in die Gleichung für M ergab für die Winkel $\alpha = 50^\circ$ bis $\alpha = 80^\circ$ die in der Tabelle enthaltenen Werthe von M_{\max} .

Der numerischen Berechnung ist auch hier das Verhältniß $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ zu Grunde gelegt. Befindet sich die Kurbel im obern Quadranten, so ist die Beanspruchung der Schubstange viel geringer, da, wie früher nachgewiesen, für diese Lage ein Punkt in der Schubstange existirt, wo die Belastung 0 ist.

Die Tabelle I zeigt, daß das Maximalbiegemoment in der Pleuellstange auftritt, wenn die Kurbel mit der Verticalen einen Winkel von 60° bildet. Da indeß das Maximalmoment für den $\angle \alpha = 80^\circ$ beinahe ebenso groß ist, die Lage, in welcher die Schubstange mit der Kurbel einen Winkel von 90° bildet, einem $\angle \alpha = 78^\circ 40'$ entspricht, so nehmen wir, um den möglichst einfachsten Fall zu erhalten, diese Lage als diejenige an, in welcher die Pleuellstange in Folge der Beschleunigungen ihrer einzelnen Punkte am stärksten beansprucht wird. In dieser Lage ist die Ordinate b als verschwindend klein $= 0$ zu setzen, so daß wir im Folgenden den Werth $M_{\max} = 0,064 l^2 a$ einzuführen haben.

a ist die Centrifugalkraft des Punktes C. Nennen wir m das im Punkte C concentrirt gedachte Massentheilen der Schubstange. Sei ferner

f der Querschnitt der Pleuellstange,

γ das Gewicht pro Cubikeinheit,

g die Beschleunigung der Schwere,

n die Anzahl der Umdrehungen der Kurbel pro Minute,

Z der sogenannte Querschnittsmodul,

S die Spannung pro Quadrateinheit,

so folgt $m = \frac{f\gamma}{g}$ und $a = \frac{m v^2}{r}$; $v = \frac{r \pi n}{30}$, somit

$$a = \frac{f\gamma}{g} \cdot \frac{r n^2}{90}, \text{ und}$$

$$M_{\max} = \frac{0,064 l^2 \cdot f \gamma r n^2}{90 g}.$$

Die Grundgleichung zur Berechnung der Spannung in der äußersten Faser ist

$$M = SZ,$$

woraus $S_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z}$ folgt. Für runden Querschnitt ist

$Z = \frac{\pi d^3}{32}$; dies und den Werth für M_{\max} eingeführt giebt die Gleichung

$$S_{\max} = 0,0000058 \frac{r n^2 l^2 \gamma}{d}.$$

In diese Formel ist r, l, d in Centim., γ in Kilogr. pro Cubikcentim. einzusetzen. Man erhält dann die Maximalbiegungsspannung in Kilogr. pro □ Centim.

Dieselbe tritt, wie die Tabelle I zeigt, in einem Abstand vom Kurbelzapfen $\xi = 0,4231$ auf.

Beispiel. Bei einer Schubstange von Schmiedeeisen, für welche $l = 150$ Centim. $\frac{r}{l}$ der Annahme nach $= \frac{1}{5}$ $n = 200$ und $d = 7,5$ Centim., $\gamma = 0,0075$ Kilogr. pro Cubikm. ist, würde $S_{\max} = 151$ Kilogr. pro □ Centim. betragen.

Specialfall. Wir hatten früher gefunden, daß für den Fall $r = l$ die Curve der Beschleunigungscentra sich auf einen in der Ebene fest liegenden Punkt reducirt, der in den Mittelpunkt des Kurbelkreises fällt. Die Beschleunigungscomponenten aller Punkte der beweglichen Stange BC in ihrer ganzen Ausdehnung sind einander gleich und die letztere ist bei gleichmäßiger Massenvertheilung in Folge der Beschleunigungen gerade so auf Biegung beansprucht, wie ein gleichmäßig belasteter auf 2 Punkten frei ausliegender Träger. (Siehe Fig. 18.)

III. Ermittlung der Maximalbiegungsspannung bei ungleicher Massenvertheilung.

In diesem Falle ist selbst bei der einfachsten Annahme die rein analytische Berechnung kaum durchführbar, besonders was die Ermittlung des Maximalmomentes betrifft. Zur Aufstellung numerischer Resultate würden sich die Methoden der Graphostatik eignen, doch wäre man genöthigt, dieselbe Construction für mehrere Lagen der Kurbel und Schubstange auszuführen, um das Maximalmoment und weiterhin die größte Biegungsspannung zu berechnen. Man kann indeß schließen, daß auch in diesem Falle das Maximalmoment in der Nähe der Lage auftreten wird, in welcher die Schubstange senkrecht auf der Kurbel steht. Wir hatten vorhin gesehen, daß bei gleichmäßiger Massenvertheilung in der Schubstange das Maximalmoment dem absoluten Werthe nach sich wenig ändert, wenn der Kurbelwinkel zwischen 60 und 80° zu liegen kommt. Dies wird im Allgemeinen auch eintreten, wenn die Massenvertheilung in der Schubstange eine ungleichmäßige ist,

wenigstens dürfte diese Annahme bei dem späterhin festgestellten Gesetz der Ungleichmäßigkeit sich wohl rechtfertigen lassen.

Wir werden daher auch hier nicht sehr fehl greifen, wenn wir ebenfalls die rechtwinkliche Stellung der Schubstange gegen die Kurbel als diejenige bezeichnen, in welcher unter allen Lagen der Schubstange die größte Beanspruchung durch Biegung erfolgt.

Behufs Anwendung des graphischen Verfahrens theilen wir die Länge l (Fig. 19, Taf. 2) der Schubstange in m gleiche Theile von der Länge λ , verlängern beiderseits l um einen halben Theil und lassen die Auflagerdrücke in den Mitten der letzten Theile wirken.

Ueber dem ersten Auflagerdruck C errichten wir die Ordinate a in einem bestimmten Maassstab und ziehen durch deren Endpunkt und denjenigen des letzten Theiles eine Gerade. Eine Schubstange von constantem Querschnitt ist, wie früher gezeigt, in der vorhin angenommenen Lage der Kurbel durch Kräfte beansprucht, die in die Mittellinien der als Rechteck anzusehenden Trapezflächen fallen und proportional deren Inhalt sind.

A. Der Querschnitt sei rechteckig.

- b die Dimension senkrecht zur Schwingungsebene constant,
 h die Dimension in der Schwingungsebene veränderlich und zwar nehmen wir den in der Praxis üblichen Fall an, daß h proportional der Vergrößerung des Abstandes vom Kurbelzapfen C abnehme (siehe Fig. 18). Die bis zu den beiden Zapfenmitten der Schubstange fortgesetzte Profilinie der Dimension h gebe im Zapfenmittel C die Höhe h_1 , im Zapfenmittel B die Höhe h_0 .

Es soll das Verhältniß $\frac{h_0}{h} = \delta$ gegeben sein. (Fig.

20.) Aus dem geradlinigten Diagramm für die Schubstange mit constantem Querschnitt leiten wir das Diagramm für diesen Fall her, indem wir jede Ordinate mit einer der Höhe h proportionalen Zahl multipliciren. Wir erhalten dann das Belastungsdiagramm, aus welchem wir graphostatisch ohne Weiteres die Momentenfläche herleiten können.

Das Moment der äußern Kräfte an einer beliebigen Stelle D sei M , dasjenige in der Entfernung λ von C , M_1 t und t_1 die zugehörigen Ordinaten der Momentenfläche, so verhält sich bekanntlich $\frac{M}{M_1} = \frac{t}{t_1}$. Nun ist aber zu Folge

der Grundgleichung für die Berechnung der Spannung

$$M = S \cdot Z,$$

$$\text{der Querschnittsmodul } Z = \frac{b h^2}{6},$$

$$\text{also } S = \frac{6M}{b h^2} = \frac{6M_1}{t_1 b} \left(\frac{t}{h^2} \right).$$

Der Bruch $\frac{6M_1}{t_1 b}$ ist für jeden Querschnitt constant, $\frac{t}{h^2}$ dagegen variabel, demnach ist S ein Maximum, wenn $\frac{t}{h^2}$ ein Maximum ist.

Dieser Maximalwerth ist in jedem einzelnen Falle den berechneten Einzelwerthen $\frac{t}{h^2}$ zu entnehmen. Die Masse der Strecke λ , die in der Zeichnung genügend klein anzunehmen ist, denken wir uns in dem Angriffspunkt einer jeden Kraft concentrirt. Nennen wir die Centrifugalkraft der im Kurbelzapfen concentrirt gedachten Strecke λ C und behalten im Uebrigen die zur Ermittlung des Werthes S , bei der Schubstange mit constantem Querschnitt gegebenen Bezeichnungen bei, so folgt

$$C = \frac{b h_1 \lambda \gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{r},$$

$$C = \frac{b h_1 \lambda \gamma}{g} \cdot \frac{r n^2}{90}.$$

Die Auflagerdrücke in den Punkten C und B seien P und Q , dann verhalten sich die Kräfte C und P zu einander wie die Längen c und p im Kräftepolygon, welche ersteren proportional sind. Man bestimmt bekanntlich den Auflagerdruck, indem man vom Pol O aus eine Linie \parallel der Schlußlinie des Seilpolygons zieht.

$$\text{Man hat also } \frac{C}{P} = \frac{c}{p}, \text{ daher } P = \frac{p}{c} C.$$

$$\text{Nun ist } M_1 = P \lambda = \frac{p}{c} \frac{b h_1 \lambda^2 \gamma}{g} \cdot \frac{r n^2}{90}.$$

$\lambda = \frac{l}{m}$ gesetzt und den Werth von M_1 in die Hauptgleichung für S_{\max} eingesetzt giebt

$$S_{\max} = \left(\frac{t}{h^2} \right)_{\max} \frac{p h_1 \gamma r n^2 l^2}{t_1 c g \cdot 15 m^2}.$$

Um in dem Factor $\left(\frac{t}{h^2} \right)_{\max}$ den absoluten Werth von h zu eliminiren, multipliciren wir, da es nur auf das Verhältniß ankommt, in welchem sich die Dimension h ändert, die Gleichung mit $\frac{h_1^2}{h_1^2}$ und erhalten

$$S_{\max} = \left(\frac{t h_1^2}{h^2} \right)_{\max} \frac{p \gamma r n^2 l^2}{t_1 c g \cdot 15 m^2 h_1}.$$

B. Der Querschnitt der Schubstange sei rund.

Auch hier erscheint es gestattet, aus denselben unter A angeführten Gründen die Lage der Schubstange, in wel-

Mer dieselbe \perp zur Kurbel steht, als charakteristische zu bezeichnen. Wir erhalten das Diagramm der biegenden Kräfte für diesen Fall, wenn wir die Ordinaten des gerablinigten Diagrammes Fig. 21, ebenfalls mit einer Zahl multipliciren, welche proportional dem Querschnitt $f = \frac{\pi d^2}{4}$ ist.

Leiten wir auch hier graphostatisch die Momentenfläche ab, so folgt unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen $\frac{M}{M_1} = \frac{t}{t_1}$, und da

$$M = \frac{S \pi d^3}{32}, \text{ so folgt}$$

$$S = \frac{32 M_1}{\pi t_1} \left(\frac{t}{d_3} \right).$$

$\left(\frac{t}{d_3} \right)$ ist die einzig variable Größe, somit ist S ein Maximum, wenn $\frac{t}{d_3}$ ein Maximum ist. Dieser Maximalwerth ist den einzeln berechneten Werthen $\frac{t}{d^3}$ zu entnehmen. Die bis zum Kurbelzapfen verlängerte Profilinie gebe im Zapfenmittel die Dimension d_1 . Dann ist analog dem Früheren die Centrifugalkraft der im Kurbelzapfen concentrirt gedachten Masse:

$$C = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \frac{\lambda \gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{r}; \quad v = \frac{r \pi n}{30}.$$

$$M_1 = P \lambda = \frac{P}{c} C \lambda \text{ gesetzt, giebt}$$

$$M_1 = \frac{P}{c} \frac{\pi d_1^2}{4} \frac{\lambda^2 \gamma}{g} \cdot \frac{r^2 n^2}{90}, \text{ somit } \left(\lambda = \frac{1}{m} \right).$$

$$S_{\max} = \left(\frac{t}{d^3} \right)_{\max} \cdot \frac{4 p d_1^2 l^2 \gamma r n^2}{45 c g t_1 m^2}.$$

Wir nennen den Durchmesser der Schubstange in der Mitte D und multipliciren die rechte Seite, um das Verhältniß von $\frac{D}{d}$ in den Maximalwerth hinein zu bekommen mit $\left(\frac{D}{d} \right)^3$, wonach wir

$$S_{\max} = \left(\frac{t D^3}{d^3} \right)_{\max} \cdot \frac{4 p d_1^2 l^2 \gamma r n^2}{45 c g t_1 D^3 \cdot m^2} \text{ erhalten.}$$

Numerische Berechnung der Constanten.

Um die graphischen Constructionen durchzuführen zu können, will ich denselben zwei Pleuelstangen zu Grunde legen, die sich in der Maschinenbauammlung der polytechnischen Schule zu Aachen befinden und mustergültige Dimensionen und Verhältnisse besitzen.

ad. A. Der Querschnitt ist rechteckig.

Bei dem vorliegenden Exemplar, das in Fig. 22, Taf. 2 in $\frac{1}{20}$ natürlicher Größe gezeichnet ist, ist das Verhältniß $\frac{h_0}{h_1} = 0,6$ gewählt.

Die Länge l beträgt 160 Centim. und ist in $m = 16$ gleiche Theile getheilt.

Bezugnehmend auf die Constructionszeichnung, Fig. 22, sind, da sich die biegenden Kräfte K bei gleichmäßiger Massenvertheilung nach einer geraden Linie gruppiren, für jeden Theilpunkt die Werthe $K, \frac{h}{h_1}, K' = K \frac{h}{h_1}$ folgende.

Die Endpunkte der Ordinaten K' liegen, wie leicht einzusehen, auf einer Parabel, die somit das Gesetz für die biegenden Beschleunigungscomponenten in einer Pleuelstange von der angenommenen Massenvertheilung darstellt. Die Werthe K und K' sind in Millimeter gemessen. Außerdem enthält die Tabelle II

Tabelle II.

No.	K	$\frac{h}{h_1}$	$K' = K \frac{h}{h_1}$	t	$t \left(\frac{h_1}{h} \right)^2$
0	50	1	50	0	0
1	47	0,975	45,8	11	11,6
2	44	0,95	41,8	20	22
3	41	0,925	37,9	26	30
4	38	0,9	34,2	31	38,2
5	35	0,875	30,6	34	44,4
6	32	0,85	27,2	35,2	48,9
7	29	0,825	23,9	35,5	52,2
8	26	0,8	20,8	34,5	53,9
9	23	0,775	17,8	32,2	53,7
10	20	0,75	15	29,5	52,5
11	17	0,725	12,3	25,8	48,2
12	14	0,7	9,8	21	42,9
13	11	0,675	7,4	14	30,8
14	8	0,65	5,2	11	26,0
15	5	0,625	3,1	5,5	14,1
16	2	0,6	1,2	0	0

noch die Werthe der Ordinaten t ebenfalls in Millimeter und die Werthe $t \left(\frac{h_1}{h} \right)^2$. Unter diesen ist im Theilpunkt 8 ein Maximalwerth = 53,9 vorhanden. Das Verhältniß $\frac{P}{c}$

im Kräftepolygon ist = 4,36. Setzen wir diese Werthe in die allgemeine Formel für S_{\max} unter A

$$S_{\max} = \left(\frac{t h_1^2}{h^2} \right)_{\max} \cdot \frac{p}{c} \cdot \frac{\gamma r n^2 l^2}{t_1 g \cdot 15 m^2 h_1} \text{ ein,}$$

ferner $m = 16$, $g = 981$ Centim., $t_1 = 11$, (der Zeichnung entnommen) so folgt

$$S_{\max} = 0,00000567 \frac{r n^2 l^2 \gamma}{h_1}.$$

Die Maximalbiegungsspannung tritt in einem Abstände 0,51 vom Kurbelzapfen auf. Die Dimensionen $r l h_1$ sind in Centim., γ in Kilogr. pro Cubiccentim. einzusetzen, man erhält dann S_{\max} in Kilogr. pro □ Centim.

ad B. Der Querschnitt ist rund.

Das Exemplar, welches der numerischen Bestimmung der Constanten in diesem Falle zu Grunde gelegt werden soll, ist in Fig. 23, Tafel 2, in $\frac{1}{20}$ natürlicher Größe gezeichnet.

Der Durchmesser in der Mitte beträgt 7,4 Centim., die Länge $l = 150$ Centim. Im Abstand von 15 Centim. von den Zapfenmitteln ist der der Kurbel zunächst liegende Durchmesser $d' = 0,8 D$, der am Kreuzkopf $d_0 = 0,7 D$ gewählt. Die Curve, welche im Längsschnitt durch die Endpunkte dieser 3 Durchmesser gelegt wird, ist meistens eine beliebige. In der Praxis reißt man dieselbe zweckmäßig längst einer elastischen Ruthe vor. Theoretisch soll diese Curve nach Redtenbacher eine cycloidische Sinoide sein und Reuleaux giebt in seinem Constructeur eine graphische Construction derselben. Ein Rotationskörper, der in der Richtung der Achse gedrückt, überall gleiche Strebefestigkeit haben soll, muß als Meridian diese Curve erhalten. Da aber die Gleichung derselben complicirt ist, so wählen wir der bequemen Ausrechnung numerischer Werthe wegen zwei Parabelzweige, die im Endpunkt vom Durchmesser D die Horizontale tangiren und durch die Endpunkte von d' und d_0 gehen.

Nennen wir x die Abscisse, welche sich von D beiderseits erstreckt, so ist der variable Durchmesser d gegeben durch die Gleichung

$$d = a + b x^2,$$

worin a und b passend zu bestimmende Constanten sind.

1) Für die Strecke zwischen der Mitte und dem Kreuzkopfbapfen ist für $x = 0$

$$d = 7,4 \text{ Centim.} = a;$$

für $x = 6$ Centim. in $\frac{1}{10}$ des natürlichen Maßstabes gemessen

$$d = 0,7 D = 5,18 \text{ Centim.} = a + b \cdot 36$$

$$\text{oder } 5,18 = 7,4 + 36 b.$$

Hieraus folgt $b = -0,062$,

$$\text{somit } d = 7,4 - 0,062 x^2.$$

2) Für die Strecke zwischen der Mitte und dem Kurbelzapfen ist für $x = 0$, $d = 7,4$ Centim. = a , für $x = 6$ Centim., $d = 0,8 D = 5,92$ Centim. = $a + b \cdot 36$,

$$\text{oder } 5,92 = 7,4 + 36 b,$$

Hieraus folgt $b = -0,041$,

$$\text{somit } d = 7,4 - 0,041 x^2.$$

Den Abständen $x = 0,5 \quad 1,5 \quad 2,5 \quad 3,5 \dots\dots$
entsprechen die Theilpunkte 7 6 5 3
resp. 8 9 10 11

Nach diesen beiden Formeln ist nun der Durchmesser d in Centim. für jeden Theilpunkt berechnet. Ferner sind der Constructionszeichnung, Fig. 23, die Werthe K als Ordinaten der für gleichmäßige Massenvertheilung geltenden geraden Linie entnommen und mit einer dem Querschnitt proportionalen Zahl $\left(\frac{d}{D}\right)^2$ multiplicirt. Die so erhaltenen Werthe K' , ferner die Ordinaten der graphostatisch construirten Momentenfläche, endlich die Werthe $\frac{t D^3}{d^3}$ sind für jeden der 15 Theilpunkte in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle III.

No.	d	K	$K' = K \left(\frac{d}{D}\right)^2$	t	$t \left(\frac{D}{d}\right)^3$
0	5,1	50	23,7	0	0
1	5,67	46,8	27,5	12,8	28,5
2	6,16	43,6	30,2	23,5	40,8
3	6,57	40,4	31,9	31,7	45,3
4	6,90	37,2	32,3	38,0	46,8
5	7,14	34,0	31,7	42,8	47,7
6	7,31	30,8	30,0	44,8	46,5
7	7,39	27,6	27,5	45,0	45,1
8	7,38	24,4	24,3	43,5	43,9
9	7,26	21,2	20,4	40,0	42,3
10	7,01	18,0	16,2	35,0	41,2
11	6,64	14,8	12,0	29,0	40,1
12	6,15	11,6	8,01	22,5	39,2
13	5,52	8,4	4,6	15,5	37,4
14	4,78	5,2	3,3	7,8	28,9
15	3,92	2,0	0,56	0	0

Die Ordinaten K' geben die Curve der biegenden Kräfte bei der angenommenen Massenvertheilung.

Die Tabelle zeigt, daß im Theilpunkt 5 der Werth $t \left(\frac{D}{d} \right)^3$ ein Maximum ist.

Diesen, so wie die der graphischen Construction direct zu entnehmenden Größen $t_1 = 12,8$ (in Millimeter, da sämtliche Ordinaten t in Millimeter gemessen sind) das Verhältniß $\frac{P}{c} = 7,6$ ebenfalls der Zeichnung entnommen, den Werth $m = 15$ (Anzahl der Theilpunkte), das Verhältniß $\frac{d_1}{D}$ im Theilpunkt 0 = 0,7 und $g = 981$ Centim. in die

unter B) aufgestellte Gleichung zur Berechnung der Maximalbiegungsspannung eingesetzt, giebt die endgültige Gleichung

$$S_{\max} = 0,00000559 \frac{r n^2 l^2 \gamma}{D}.$$

Auch hier sind die Dimensionen r, l, D , in Centim., γ in Kilogr. pro Cubikcentim. einzusetzen. Man erhält dann die Maximalspannung in Kilogr. pro □ Centim.

Dieselbe tritt, wie die Tabelle zeigt, im Abstand $\frac{1}{3} l$ vom Kurbelzapfen auf. —

Die Formeln, welche wir für die Maximalbiegungsspannung in den drei untersuchten Pleuellstangen erhalten haben, sind folgende:

1) Für eine Pleuellstange mit rundem überall constantem Querschnitt ist

$$S_{\max} = 0,0000058 \frac{r n^2 l^2 \gamma}{d}.$$

2) Für eine Pleuellstange mit rechteckigem Querschnitt, bei welcher das geradlinigte Verjüngungsverhältniß $\frac{h_0}{h_1} = 0,6$ angenommen, ist

$$S_{\max} = 0,00000567 \frac{r n^2 l^2 \gamma}{h_1}.$$

3) Für eine Pleuellstange mit rundem veränderlichen Querschnitt, bei welcher D der Durchmesser in der Mitte, d_1 und d_0 die Durchmesser im Abstände 0,1 vom Mittel des Kurbel-, resp. des Kreuzkopfszapfens gegeben sind durch die Verhältnisse

$$\frac{d_1}{D} = 0,8; \quad \frac{d_0}{D} = 0,7; \quad \text{ist}$$

$$S_{\max} = 0,00000559 \frac{r n^2 l^2 \gamma}{D}.$$

Vergleichen wir diese 3 Formeln mit einander, so bemerken wir, daß die Constanten nahezu gleich sind.

Setzen wir sie einander gleich, was nach den Vernachlässigungen, welche wir im Laufe der Rechnung machten, um zu annähernd richtigen Resultaten zu kommen, wohl gestattet

sein dürfte, nehmen wir ferner an, daß in allen 3 Fällen das Verhältniß $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ist, daß die Pleuellstangen aus gleichem Material, gleich lang sind, und daß die Kurbel in allen drei Fällen dieselbe Tourenzahl pro Minute macht, so können wir die laufende Proportion bilden

$$(S_{\max})_1 : (S_{\max})_2 : (S_{\max})_3 = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{D} : \frac{1}{d}.$$

Dies interessante Resultat spricht sich demnach in Worten folgendermaßen aus.

Bei Pleuellstangen von rechteckig in der Schwingungsebene veränderlichem (Breite constant), von rundem veränderlichen und rundem constanten Querschnitt (die Aenderung des Querschnitts ist eine bestimmt angenommene praktischen Regeln entlehnte) verhalten sich, wenn sie in denselben Kurbelmechanismus $\left(\frac{r}{l} = \frac{1}{5} \right)$ eingeschaltet werden, von gleichem Material und gleicher Länge sind, die in Folge der Beschleunigungen der einzelnen Massenpunkte eintretenden Maximalbiegungsspannungen, wie die reciproken Werthe der Hauptdimensionen $h; D; d$.

Setzen wir im speciellen Fall diese 3 Dimensionen einander gleich, so erkennt man, daß die Pleuellstange mit rechteckig in der Schwingungsebene veränderlichem Querschnitt in Bezug auf die Beanspruchung durch die Beschleunigungen die günstigste, die Stange mit rundem constanten Querschnitt die ungünstigste Massenvertheilung hat.

Und in der That ist die erstere bei sehr schnell gehenden Maschinen mit Vorliebe angewandt, besonders bei Locomotiven

Bei dieser Untersuchung, die wir in dem eben ausgesprochenen Satz zu einem gewissen Abschluß gebracht haben, ist eine Inanspruchnahme der Schubstange vollständig vernachlässigt, wir meinen die Inanspruchnahme auf Zerknickung; die Theorie derselben steht aber zur Zeit noch auf so schwachen Füßen, beruht theilweise sogar auf falschen Voraussetzungen, daß eine Vernachlässigung der durch die Zerknickungsfestigkeit hervorgerufenen Spannung schon deswegen gerechtfertigt erscheint.

Außerdem wird aber bei Berücksichtigung dieser Spannung das Problem so schwierig und verwickelt, daß man auf die Erreichung eines klaren übersichtlichen Resultates, wie wirs oben erhalten haben, von vornherein verzichten muß.

Wie weit die stattgehabte Vernachlässigung den praktischen Werth der vorliegenden Untersuchung für die Ermittlung der Maximalbiegungsspannung beeinträchtigt, überlasse ich dem Urtheil des geehrten Lesers.

Anhang.

Der Wendekreis dient zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte resp. Krümmungsradien in einem zwangsläufig bewegten System.

In dem speciellen Fall der zwangsläufigen Bewegung einer geraden Linie läßt sich folgender Satz herleiten:

Wenn eine gerade Linie gezwungen ist, sich mit zweien ihrer Punkte auf beliebigen aber fest vorgeschriebenen Bahnen zu bewegen, so ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Bahnelemente, welche die einzelnen Punkte der Geraden bei unendlich kleiner Verschiebung beschreiben, ein Kegelschnitt.

Beweis. Die beiden Punkte A und B der Geraden G seien gezwungen, sich in Kreisen um A_1 , B_1 zu bewegen (siehe Fig. 24, Tafel 3).

Da wir uns nur eine unendlich kleine Verschiebung der Geraden vorgenommen denken, so können die Kreise um A_1 , B_1 als die Krümmungskreise der Curven aufgefaßt werden, in denen die Punkte A und B verharren sollen.

Dadurch ist die im obigen Satz ausgesprochene Bedingung gewahrt.

Man construirt sich den Wendekreis am zweckmäßigsten auf folgende Weise:

Wenn man auf der andern Seite von A, dem Pol P entgegengesetzt, auf dem Strahl PM den Punkt P bestimmt, so daß $PA = PA$ ist, so ist der Schnittpunkt S des Wendekreises mit dem Strahl PM, auch Wendepunkt genannt, der 4. harmonische Punkt zum Systempunkt A, dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt A_1 und Gegenpunkt P. (Diese geometrische Beziehung theilt auch Schell in seinem Werk „Theorie der Bewegung und Kräfte“, Seite 391 mit).

Der Schnittpunkt S liegt stets zwischen den beiden Punkten P und P und ist vom Krümmungsmittelpunkt A_1 durch den Gegenpunkt P, resp. Pol P, harmonisch getrennt. Behufs Construction des 4. harmonischen Punktes S legt man zweckmäßig durch A_1 eine beliebige Gerade und wählt auf derselben beiderseits von A zwei beliebige Punkte, welche von A_1 denselben Abstand haben $A_1D = A_1E$. Die beiden Verbindungslinien DP und EP schneiden einander in F. Eine durch F parallel der Geraden DE gezogene Linie bestimmt auf dem Strahl PA als 4. harmonischen Punkt den Wendepunkt S.

Diese Construction des 4. harmonischen Punktes, wenn die drei andern gegeben, ist bekannt; denn der unendlich ferne Punkt der Geraden DE ist, da der Annahme nach A_1 in der Mitte zwischen D und E liegt, der 4. harmonische Punkt zu D, A_1 und E. Dieser Punktreihe entspricht, weil $FS \parallel DE$ ist, ein harmonisches Strahlenbüschel in F und die Punktreihe

PSPA, ist als Schnitt desselben mit dem Strahl PM eine harmonische Punktreihe.

Auf einem zweiten durch P gehenden Strahl PN, seien der Systempunkt B und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt B_1 gegeben. Wir construiren den Gegenpunkt P', indem wir $PB = P'B$ machen. Der Schnittpunkt S' des Wendekreises bildet mit den beiden Punkten P', B und dem Pol ebenfalls eine harmonische Punktreihe.

Legen wir nun durch die 3 Punkte PSS' einen Kreis, so ist dieser der Wendekreis des Systems.

Irgend ein dritter Strahl PR schneidet den Wendekreis im Punkte S'' und die Gerade PP' im Punkte P''. Der 4. harmonische Punkt zu P''S''P ist der Krümmungsmittelpunkt C' zu der Bahn, welche der Halbirungspunkt C der Strecke PP'' als Systempunkt beschreibt.

Die harmonischen Punktreihen zweier Strahlen können, da deren Schnittpunkt P jeder Punktreihe angehört, als Schnitt eines Strahlenbüschels aufgefaßt werden, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt s von SS' mit PP' ist. Die Verbindungslinie A_1s muß durch den dem Strahl PN zugehörigen Krümmungsmittelpunkt B_1 gehen.

Legen wir durch AB eine gerade Linie G, so liegen auch die Gegenpunkte P auf einer Geraden, die durch PP' geht. Denken wir uns nun durch P beliebig viel Strahlen gezogen und betrachten auf irgend einem Strahl, z. B. PM den Wendepunkt S und Krümmungsmittelpunkt A_1 als Mittelpunkte von Strahlenbüschel, so sind diese beiden Strahlenbüschel einander perspectivisch, weil die Schnittpunkte s der entsprechenden Strahlen auf der Geraden PP' liegen.

Das Strahlenbüschel in P ist identisch mit dem in S, denn die entsprechenden Strahlen schließen constante Winkel ein (Peripheriewinkel auf dem Bogen PS).

Demnach befindet sich Strahlenbüschel P zum Strahlenbüschel A_1 in project. Lage, d. h. die den Punkten der Geraden G zugehörigen Krümmungsmittelpunkte liegen als Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einem Kegelschnitt.

Construction des Kegelschnitts.

Gegeben sind die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen, welche 2 Punkte AB der Geraden G beschreiben.

Fall A. Die Gerade G schneidet den Wendekreis.
Fig. 25.

Dann ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Denn die den Schnittpunkten T und U zugehörigen Krümmungsmittelpunkte liegen im Unendlichen.

Die Strahlen PT und PU sind die Richtungen der Asymptoten.

1) Die Gegengerade PP' schneidet ebenfalls den Kreis.

Die Schnittpunkte derselben mit dem Wendekreis seien V und W . Den Strahlen PV und PW des Strahlenbüschels P entsprechen die Strahlen A_1V und A_1W des Strahlenbüschels A_1 , folglich gehören beide Schnittpunkte V und W dem Kegelschnitt an. Ferner entspricht die Tangente an den Wendekreis in P dem Strahl A_1P , d. h. auch der Pol P liegt auf dem Kegelschnitt.

Durch die 5 Punkte A, B, V, W und P ist die Hyperbel eindeutig bestimmt.

Tangentenconstruction und Lage der Asymptoten.

Dem Strahl PS des Strahlenbüschels P Fig. 26. entspricht der in S den Wendekreis tangirende Strahl des Strahlenbüschels S . Derselbe schneidet die Gegengerade PP' in s . Der Strahl A_1s des Strahlenbüschels A_1 schneidet den entsprechenden Strahl A_1P des Strahlenbüschels P in A_1 , d. h. es sind hier 2 Punkte der Hyperbel zusammengefallen und A_1s ist die Tangente an die Hyperbel im Punkte A_1 .

Andererseits schneidet die Tangente in S' die Gegengerade in s' . $s'B_1$ ist die Tangente an die Hyperbel in B_1 . Im Pol P fällt die Tangente an den Wendekreis mit der Tangente an die Hyperbel zusammen.

Diese Tangentenconstruction führt nun unmittelbar zur Bestimmung der Asymptoten; denn ziehen wir durch die beiden Punkte T und U Tangenten an den Wendekreis, so schneiden diese die Gegengerade PP' in 2 Punkten t und u . Die durch t und u nach den unendlich fernen auf den Strahlen PT und PU gelegenen Krümmungsmittelpunkten, d. h. $\parallel PT$ und PU gezogenen Geraden sind die Asymptoten der Hyperbel, deren Richtungen bereits gegeben sind. Die Secantenconstruction der Hyperbel führt nun am schnellsten zum Verzeichnen derselben.

2) Die Gegengerade PP' schneidet nicht den Kreis.

Die Construction ist ganz dieselbe. Nur die Schnittpunkte v und w existiren nicht als Punkte der Hyperbel.

Fall B. Die Gerade G schneidet nicht den Wendekreis. Fig. 27.

Dann hat dieselbe keinen Punkt, dessen zugehöriger Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen liegt.

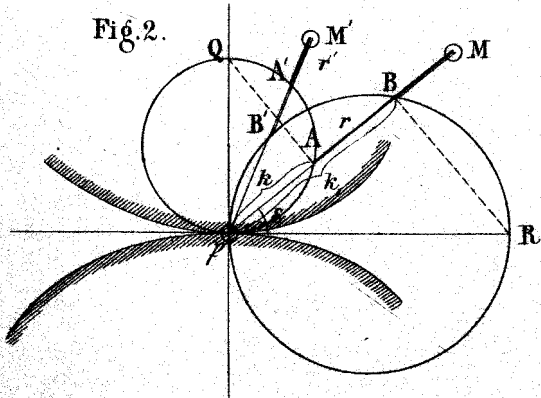
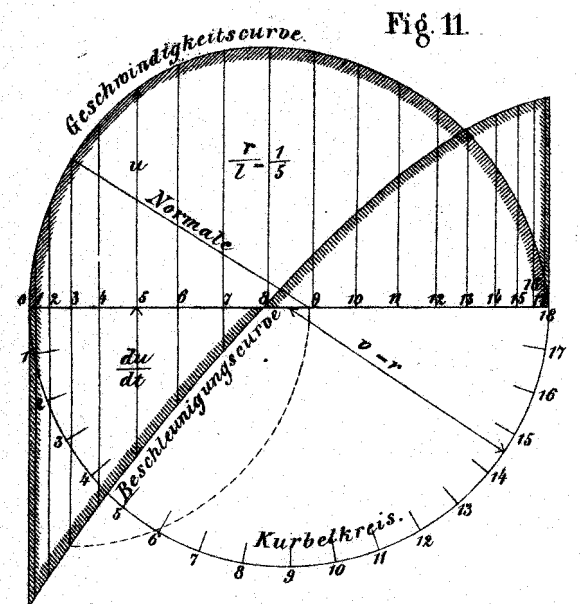
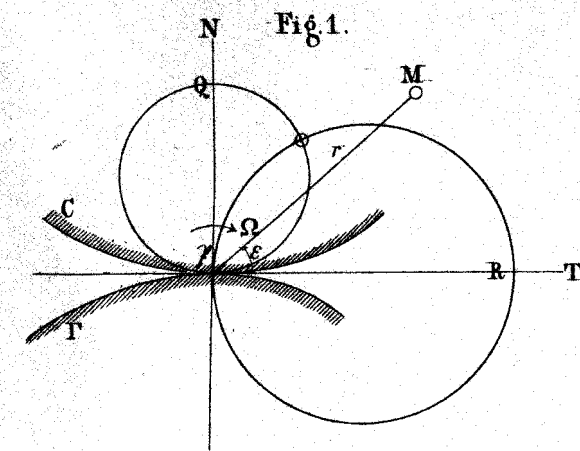
Der Kegelschnitt ist somit eine Ellipse. Die bei der Hyperbel gegebene Tangentenconstruction ist auch bei der Ellipse gültig. Dieselbe geht durch die gegebenen Krümmungsmittelpunkte A_1B_1 und durch den Pol P . Fig. 27. Ziehen wir durch S und S' 2 Tangenten an den Wendekreis, so schneiden diese die Gegengerade in s und s' . Die Verbindungslinien sA_1 und $s'B_1$ geben die Tangenten an die Ellipse in A_1B_1 .

Die Tangente in P an den Wendekreis ist ebenfalls Tangente an die Ellipse. Aus 3 Tangenten und deren Berührungspunkten kann dieselbe nach bekannten Regeln constructirt werden.

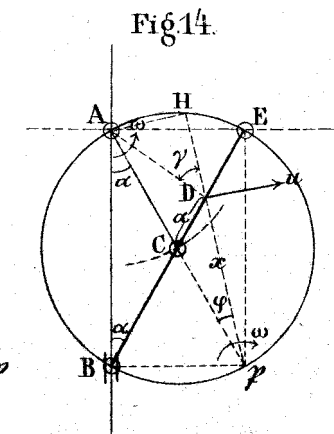
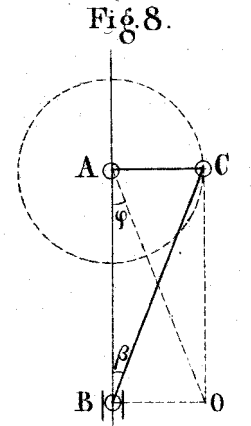
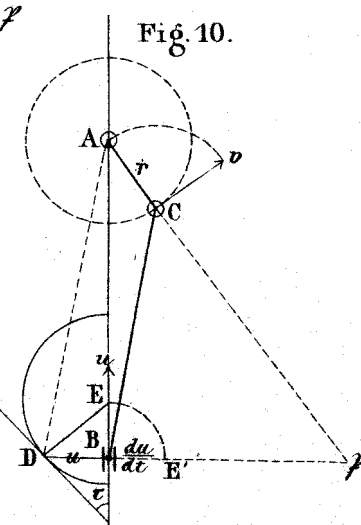
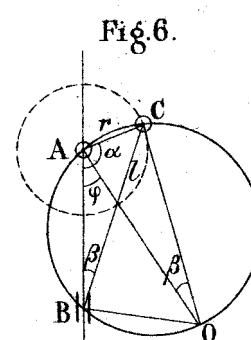
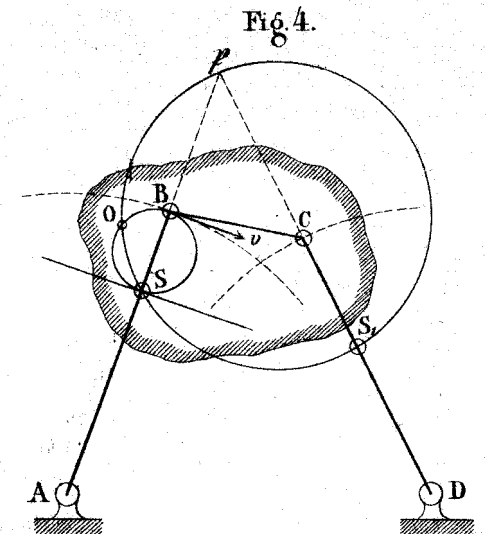
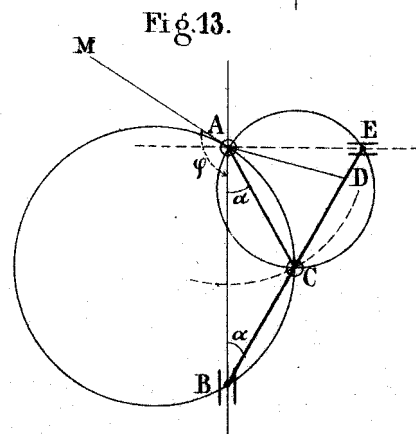
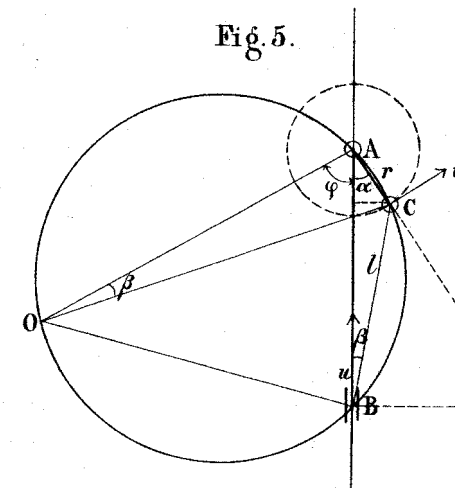
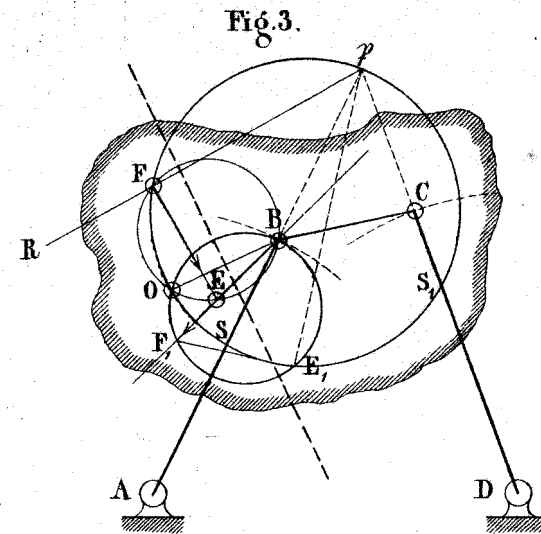
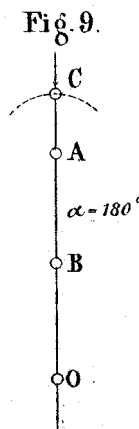
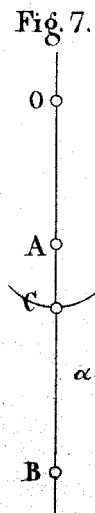
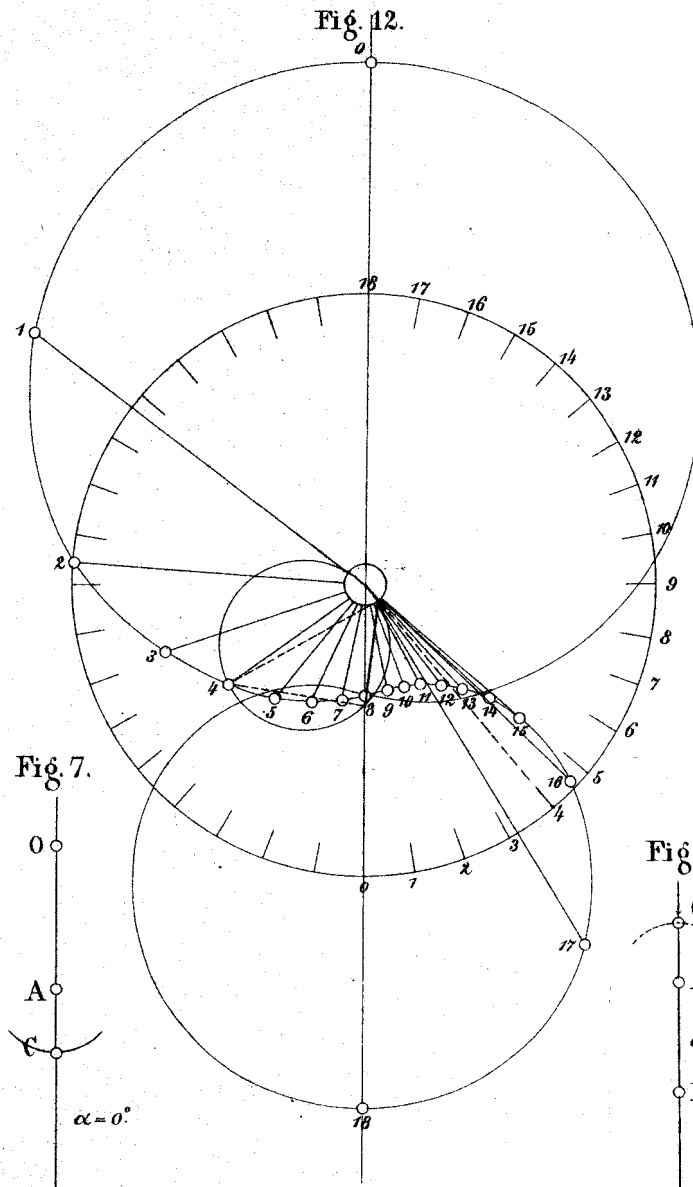
Fall C. Die Gerade G berührt den Wendekreis. Fig. 28.

Dann hat der Kegelschnitt einen unendlich fernen Punkt und in diesem eine unendlich ferne Tangente. Derselbe ist also eine Parabel. Der unendlich ferne Punkt liegt auf dem Strahl, der durch P und den Tangirungspunkt V der Geraden G mit dem Wendekreis geht; folglich ist dieser Strahl die Axe der Parabel. Die Tangente in V schneidet die Gegengerade im Unendlichen. Nach dem unendlich fernen Punkt der Geraden PP' ist auch die Tangente im unendlich fernen Punkt der Parabel gerichtet. Die durch A_1 und B_1 \parallel der Tangente in P gezogenen Sehnen der Parabel werden durch die Axe halbirt.

Aachen im Februar 1872.



Curve der Beschleunigungspole
in einem
Kurbelmechanismus.



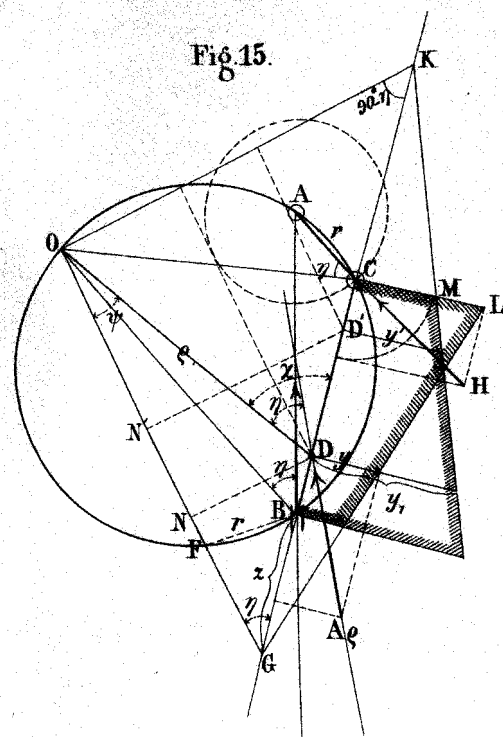


Fig. 15.

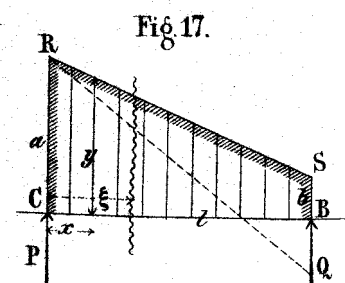


Fig. 17.

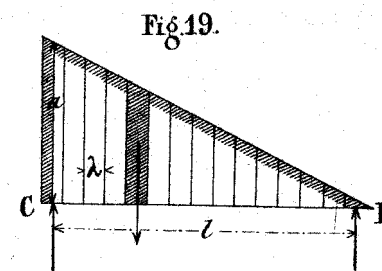


Fig. 19.

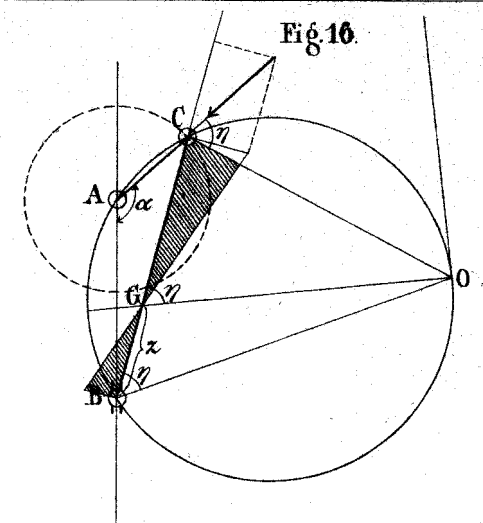


Fig. 16.

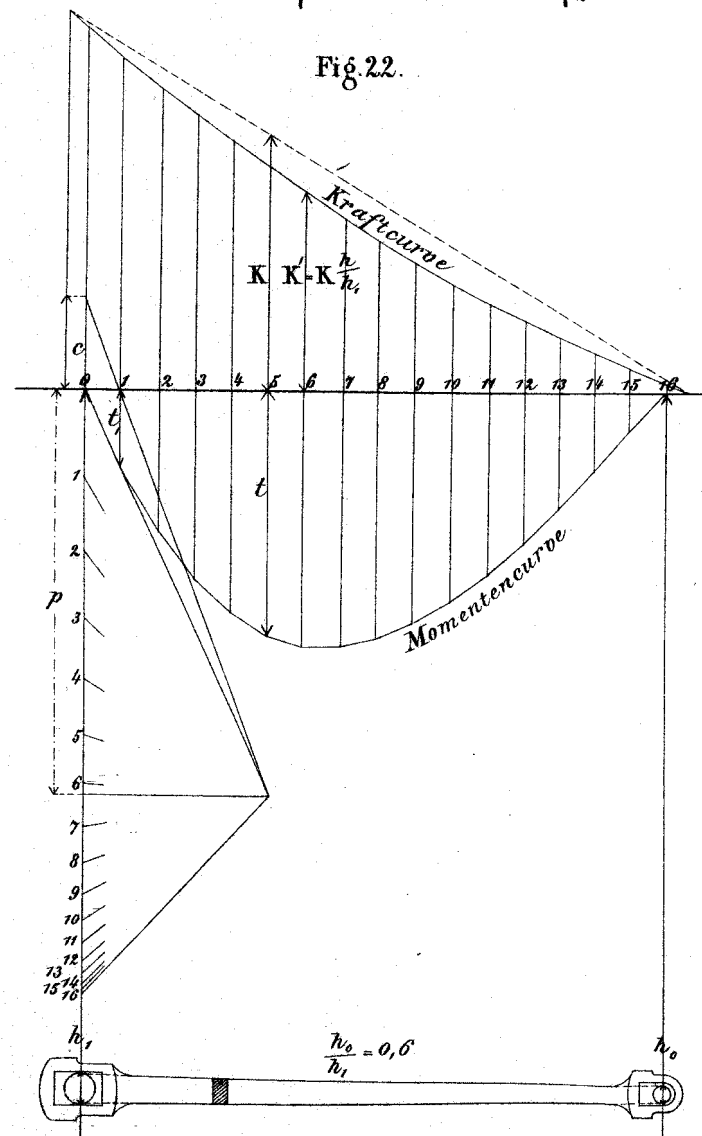


Fig. 22.

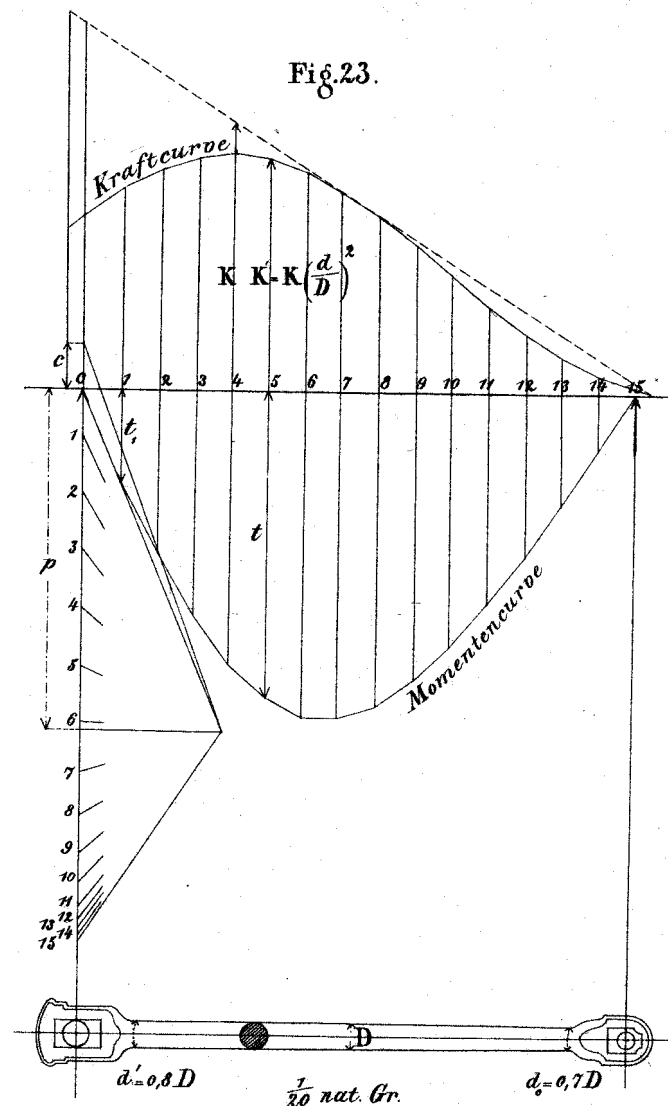


Fig. 23.

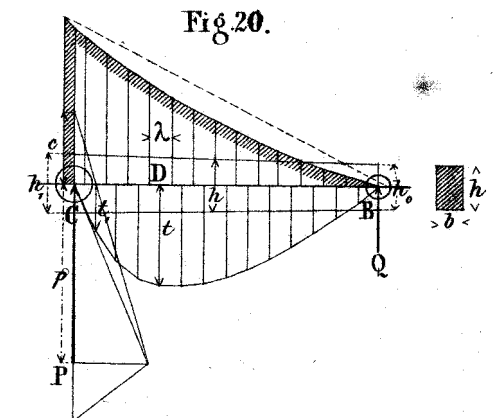


Fig. 20.

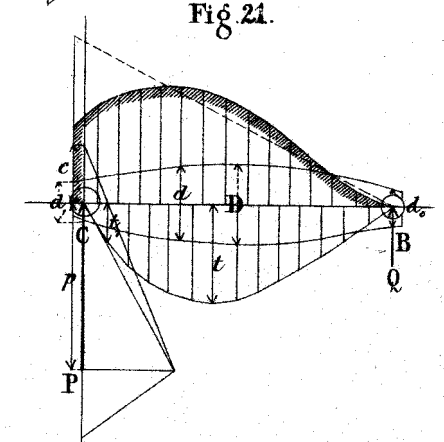


Fig. 21.

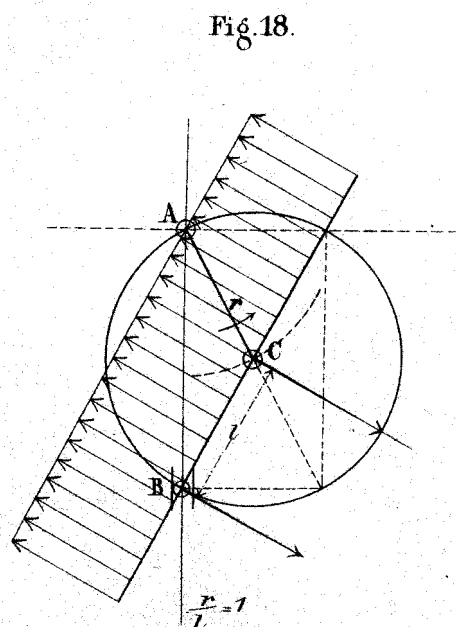


Fig. 18.

Fig. 24.

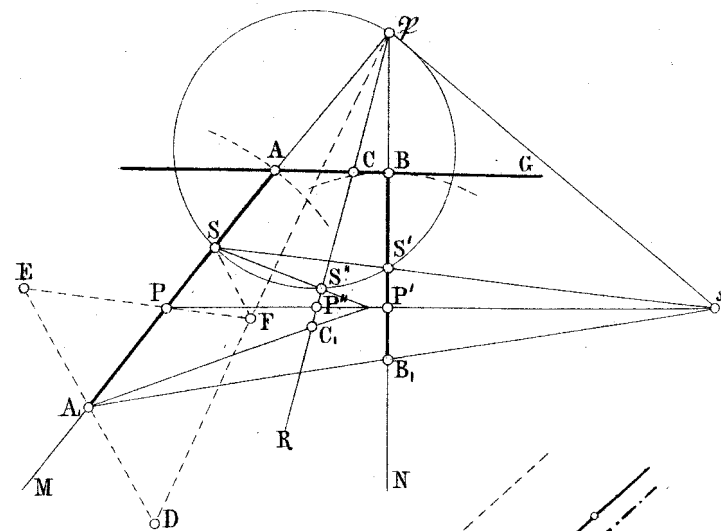


Fig. 25.

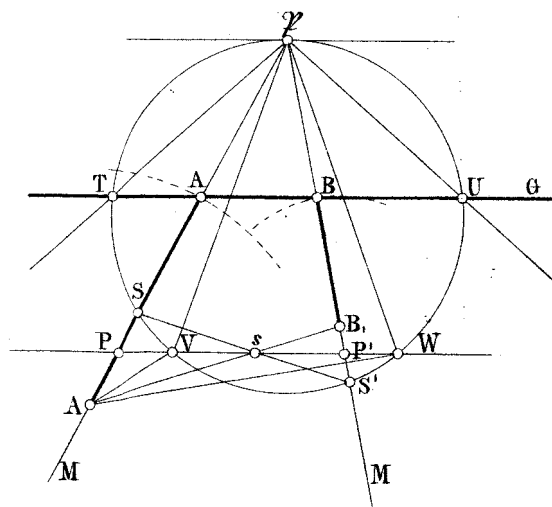


Fig. 27.

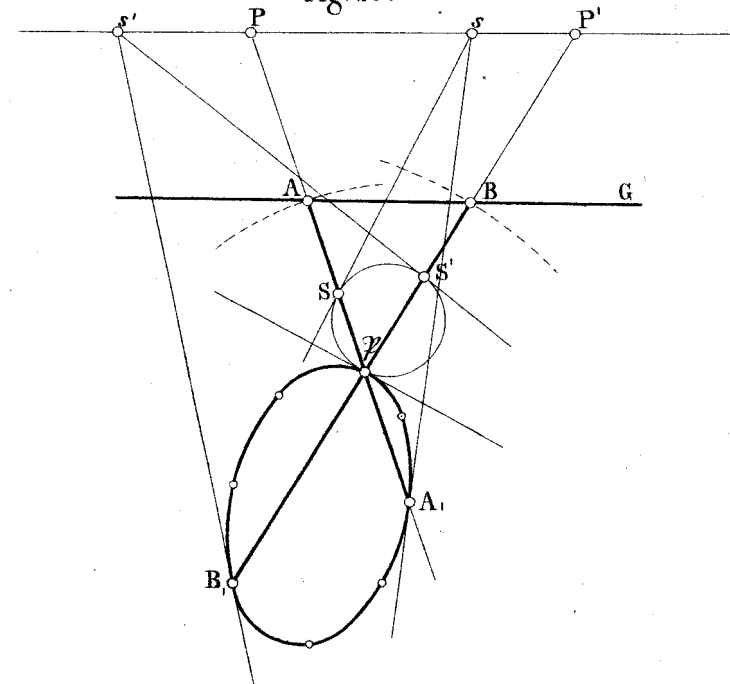


Fig. 28.

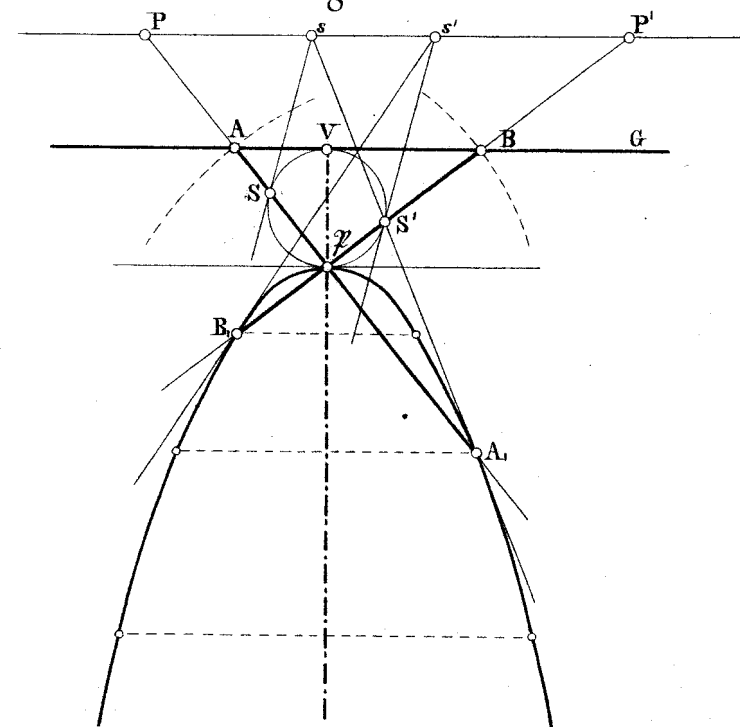


Fig. 26.

